Corso di Laurea in Matematica

II Compito di ALGEBRA I

4 maggio 2017

Esercizio 1. (9 punti) Si determinino gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti dell'anello

$$A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \ .$$

Si dica se esiste un omomorfismo di anelli $\phi : A \to \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. (9 punti) Posto $\mathbb{Z}_{45} = \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$, siano

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_{45} \right\} \qquad \text{e} \qquad I := \left\{ \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_{45} \right\} \ .$$

1. Si provi che A è un anello, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici, e che I è un ideale di A.
2. Si determinino gli ideali dell'anello quoziente A/I. Si dica se I è un ideale primo.

Esercizio 3. (9 punti) Siano $f = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, $g = x^3 + 4x^2 + x - 6$ e sia $I = (f, g)$ l'ideale generato da f e g in $\mathbb{Q}[x]$.

1. Si determinino gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$.
2. Si dica se $\mathbb{Q}[x]/I$ è un dominio di integrità e se contiene elementi nilpotenti non nulli.
3. Si dica se $1+x^2+I$ è invertibile in $\mathbb{Q}[x]/I$ e, se lo è, se ne determini l'inverso.

Esercizio 4. (4 punti) Si provi che 3 è un elemento irriducibile, ma non primo, dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.