Prova scritta di ALGEBRA 1
A.A. 2015/16
16 gennaio 2017

Esercizio 1. *(6 punti) Sia* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ *definita per ogni* $z \in \mathbb{Z}$ *da*

$$f(z) = \begin{cases} z^2 - z & \text{se } z > 0 \\ -z + 1 & \text{se } z \leq 0. \end{cases}$$

Provare che non esiste un'applicazione $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tale che* $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$.
Costruire due diverse applicazioni $h_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tali che* $f \circ h_i = id_{\mathbb{N}}$ *(per* $i = 1, 2$*).*

Esercizio 2. *(9 punti) Per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$ *si ponga*

$$m \rho n \quad \text{se e solo se} \quad m = n \ \text{ oppure } \ 3m | n.$$

1. *Provare che* ρ *definisce una relazione di ordine su* $\mathbb{N}$.
2. *Dimostrare che il sottoinsieme* $\left\{3^k | k \in \mathbb{N}\right\}$ *è totalmente ordinato.*
3. *Determinare gli eventuali elementi minimali/massimali e il minimo/massimo di* $(\mathbb{N}, \rho)$.
4. *Determinare inf e sup dell'insieme* $\{3, 6\}$.

Esercizio 3. *(8 punti) Si consideri l'insieme*

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 5v & u - v \end{pmatrix} | u, v \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Dimostrare che R *è un anello rispetto alle usuali operazioni tra matrici.*
Mostrare che la matrice $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ *soddisfa la relazione* $\alpha^2 + \alpha - 5 = 0$.
Provare infine che R *è isomorfo a* $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 5)$.

Esercizio 4. *(8 punti) Sia* A *il sottoanello di* $\mathbb{C}$

$$A = \left\{ a + i\sqrt{7}b \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. *Trovare tutti gli elementi invertibili di* A.
2. *Provare che* A *non è un UFD.*