I Compito di ALGEBRA 2
16 gennaio 2017

Esercizio 1. *(10 punti) Siano G un gruppo che agisce sull'insieme Ω e H, K sottogruppi di G. Se Δ è un'orbita di H e Γ un'orbita di K tali che $\Delta \cup \Gamma = \Omega$ e $\Delta \cap \Gamma \neq \emptyset$, provare che $\langle H, K \rangle$ è transitivo su Ω. Siano $\alpha = (143)$, $\beta = (235) \in S_5$, e si ponga $G = \langle \alpha, \beta \rangle$.*

1. *Provare che G è transitivo su $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*
2. *Provare che 3 e 5 dividono l'ordine di G.*
3. *Provare che l'ordine di G non può essere 15.*
4. *Sapendo che A_5 è semplice, provare che $G = A_5$.*

Esercizio 2. *(8 punti) Si provi che $A = \{n/5^k \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$. Posto $G = A/\mathbb{Z}$ si dimostri che, se $g \in G$, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $o(g) = 5^m$. Mostrare che, per ogni morfismo $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow G$, il sottogruppo $\theta(\mathbb{Z})$ è finito ed isomorfo a $\mathbb{Z}/5^l\mathbb{Z}$ per qualche $l \in \mathbb{N}$.*

Siano $\alpha, \beta : G \longrightarrow G$ definite da $\alpha(g) = 2g$ e $\beta(g) = 5g$ per ogni $g \in G$. Provare che α è un isomorfismo, mentre β è un morfismo suriettivo ma non iniettivo. Determinare $\ker(\beta)$.

Esercizio 3. *(7 punti) Sia $\Omega = \mathbb{Z}/102\mathbb{Z}$ e si considerino le funzioni $\sigma, \tau : \Omega \longrightarrow \Omega$ definite ponendo, per ogni $x \in \Omega$, $\sigma(x) = x + 1$, $\tau(x) = -x + 3$. Provare che $\sigma, \tau \in G = \mathrm{Sym}(\Omega)$. Trovare gli ordini di σ e τ e mostrare che $\tau \in N_G(\langle \sigma \rangle)$. Trovare l'ordine del gruppo $H = \langle \sigma, \tau \rangle$. Si dica se H possiede elementi di periodo 4.*

Esercizio 4. *(7 punti) Sia $u = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$. Provare che $g = x^3 - 5$ ha uno zero in $\mathbb{Q}[u]$. Trovare f, polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$. Detto $\mathbb{E}$ il campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$, provare che g si fattorizza completamente in $\mathbb{E}$. Dedurre che $\mathbb{E}$ è il campo di spezzamento per g su $\mathbb{Q}$ e determinare $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}|$*