Prova scritta di ALGEBRA 2
A.A. 2016/17
3 luglio 2017

Esercizio 1. *Siano G un gruppo e σ un suo automorfismo.*

1. *Provare che se $\sigma(x) = x^{-1}$, per ogni $x \in G$, allora G è abeliano.*
2. *Nel caso in cui G sia finito, provare che se $\sigma^2 = id$ e $\sigma(x) \neq x$ per ogni $x \in G$, $x \neq 1_G$, allora $G = \left\{g^{-1}\sigma(g) | g \in G\right\}$. Dedurre, sfruttando il punto 1., che G è abeliano.*

Esercizio 2. *Sia G un gruppo d'ordine $7 \cdot 13^2$. Provare quanto segue.*

1. *G è abeliano se e solo se $n_7 = n_{13} = 1$ (n_p =numero di p-Sylow di G).*
2. *Se esiste un unico sottogruppo d'ordine 13, allora G possiede un sottogruppo ciclico d'ordine $7 \cdot 13$.*
3. *Se esiste un unico sottogruppo d'ordine 13, allora G è ciclico.*
4. *Se G non è abeliano, allora non esistono sottogruppi d'ordine $7 \cdot 13$.*

Esercizio 3. *Sia α il numero complesso $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$.*

1. *Provare che $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ e dedurre che $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}]$.*
2. *Trovare un polinomio di grado 6 che ammette α come radice e dedurre che tale polinomio è irriducibile.*
3. *Dire, motivando la risposta, se l'estensione $\mathbb{Q}[\alpha]\big|\mathbb{Q}$ è normale/di Galois.*

Esercizio 4. *Sia $E|F$ un'estensione di Galois con gruppo di Galois $Gal(E|F)$ abeliano. Siano $u \in E$ ed f il suo polinomio minimo su F. Provare che $F[u]$ è campo di spezzamento di f su F.*