Corso di Laurea in Matematica

Programma del corso di ALGEBRA I – a.a. 2016/2017

Il presente programma fa riferimento alle note: *Algebra I, dispense 2016-2017* reperibili in:

http://web.math.unifi.it/users/fumagalli/
http://web.math.unifi.it/users/dolfi/

Vengono indicati i paragrafi che fanno parte del programma d'esame; quando non diversamente segnalato, i paragrafi elencati s'intendono da studiare per intero.

Parte I Insiemi e Numeri

Capitolo 1 Insiemi e sottoinsiemi, insieme delle parti, operazioni tra insiemi e loro principali proprietà, unioni ed intersezioni generalizzate, prodotto cartesiano. Applicazioni: immagini, controimmagini, applicazioni iniettive, suriettive e biettive. Composizione di applicazioni, invertibilità e applicazioni inverse (Proposizione 1.11: solo enunciato). [§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4].

Capitolo 2 I numeri interi: buon ordine e principio di induzione (nelle due forme), rappresentazioni b-adiche, divisibilità, MCD e formula di Binet, numeri primi, teorema fondamentale dell'aritmetica, teorema di Euclide, algoritmo di Euclide, minimo comune multiplo. Insiemi finit e cardinalità dell'insieme delle parti, coefficienti binomiali, formula di Newton. Numeri complessi. [§ 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 , 2.5].

Capitolo 3 Operazioni binarie: semigruppi, monoidi e gruppi. Relazioni d'equivalenza, insieme quoziente, partizioni, equivalenza associata ad una applicazione. Relazioni d'ordine, insiemi parzialmente e totalmente ordinati, massimi, minimi, massimali, minimali, estremi inf e sup. Ordine lessicografico. Cardinalità di un insieme, numerabilità di $\mathbb{Q}$, Teorema di Cantor [§ 3.1, 3.2, 3.3, 3.4]

Capitolo 4 Equazioni diofantee di primo grado, congruenze, classi di congruenza, insieme quoziente, compatibilità con le operazioni, piccolo teorema di Fermat, equazioni alle congruenze di primo grado, teorema Cinese del resto [§ 4.1 e 4.2]

Francesco Fumagalli

Parte II: Anelli e Polinomi

Capitolo 5 Anelli: prime proprietà, potenze e multipli, sottoanelli; divisori dello zero, domini d'integrità, legge di cancellazione, campi, prodotti diretti di anelli. Ideali, ideali di $\mathbb{Z}$, ideali principali, somma di ideali, ideali di un campo. Omomorfismi e isomorfismi: prime proprietà, immagine e nucleo, omomorfismi iniettivi [§ 5.1, 5.2, 5.3, 5.4].

Capitolo 6 Anelli notevoli. Anelli di classi di congruenza, invertibili di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Caratteristica di un anello. Campo delle frazioni di un dominio d'integrità. Anello dei quaternioni [§ 6.1, 6.3, 6.4].

Capitolo 7 Divisibilità e ideali principali, elementi irriducibili ed elementi primi, fattorizzazioni. Domini a Fattorizzazione Unica e loro caratterizzazione, MCD nei domini a fattorizzazione unica, ideali massimali e ideali primi, ideali massimali e primi in $\mathbb{Z}$ e nei Domini a Ideali Principali. Esempi di domini di integrità non a fattorizzazione unica e di UFD non PID. Ogni Dominio a Ideali Principali è UFD, domini euclidei, ogni dominio euclideo è un PID, interi di Gauss. Primi dell'anello degli interi di Gauss. [§ 7.1, 7.2, 7.3, 7.4].

Capitolo 8 Polinomi: definizioni, anello dei polinomi, grado, polinomi invertibili, principio di sostituzione, costruzione formale dell'anello dei polinomi. Divisione euclidea per polinomi. Se F è un campo F[x] è un dominio euclideo, algoritmo di Euclide per polinomi, fattorizzazioni di polinomi. Teorema di Ruffini, numero di radici distinte, polinomi irriducibili. Teorema di Wilson. Serie formali (senza dimostazioni). Polinomi primitivi, lemma di Gauss, fattorizzazioni in $\mathbb{Z}[x]$ ed in $\mathbb{Q}[x]$, criterio di Eisenstein. [§ 8.1, 8.2, 8.3, 8.4].

Capitolo 9 Anelli quoziente: definizione e prime proprietà, quozienti modulo ideali primi ed ideali massimali. Teorema di omomorfismo e Teorema di corrispondenza, ideali di un anello quoziente. Quozienti in un PID ed in $F[x]$, ideali massimali ed elementi irriducibili, descrizione degli elementi dei quozienti, esempi di campi finiti. Estensioni semplici. [§ 9.1, 9.2, 9.3, 9.4 fino al Teorema 9.19 (incluso)].

Silvio Dolfi