Compito di Algebra II
4/6/12

Esercizio 1 Siano $u = \sqrt[5]{2}$ e $v = \exp(2\pi i/5)$.

1. Trovare il grado di $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[u, v]$ e dire se $\mathbb{F} \mid \mathbb{Q}$ è estensione di Galois.
2. Detto G il gruppo di Galois di questa estensione, trovare il numero dei p-Sylow di G per ogni primo p che divide l'ordine di G.
3. Dimostrare che $\mathbb{F}$ contiene un sottocampo $\mathbb{K}$ di grado 2. È vero che $\mathbb{K} \mid \mathbb{Q}$ è normale?

Esercizio 2 Nel gruppo simmetrico S_8 sia τ la permutazione definita da

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare l'ordine di τ.
2. Calcolare la cardinalità della classe di coniugio di τ e del centralizzante di τ in S_8.
3. $C_{S_8}(\tau)$ è abeliano/ciclico?
4. Posto $\sigma = (12)$, dire se τ^σ e $\tau\sigma$ appartengono al sottogruppo alterno A_8.

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_9$ l'applicazione definita ponendo $f(x + 6\mathbb{Z}) = 2^x + 9\mathbb{Z}$. Dopo aver mostrato che f è ben definita, provare che l'insieme $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_6$ munito della seguente operazione è un gruppo

$$(a, x) * (b, y) = (a + f(x)b, x + y).$$

Determinare l'ordine di G e il numero dei sottogruppi di Sylow di G.

Esercizio 4 Sia G un gruppo che agisce a destra sull'insieme Ω. Se Δ è un sottoinsieme finito di Ω, definiamo $G(\Delta) = \{g \in G \mid \delta g \in \Delta \,\forall\, \delta \in \Delta\}$. Dimostrare che $G(\Delta) \leq G$. Per ogni $g \in G$, provare che $G(\Delta)^g = G(\Delta g)$. Mostrare infine che $G(\Delta)$ è normale in G se Δ è unione di orbite di G.