Compito di Algebra II
2/7/12

Esercizio 1 Siano $u = \sqrt{6+\sqrt{11}}$ e $v = \sqrt{6-\sqrt{11}}$.

1. Provare che $u+v$ ha grado 2 su $\mathbb{Q}$.
2. Determinare $|\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}[u+v]|$.
3. Trovare il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$.
4. Detto $\mathbb{F}$ il campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$, determinare la classe di isomorfismo di $Gal(\mathbb{F} \mid \mathbb{Q})$.

Esercizio 2 Dato un gruppo abeliano G, si consideri un suo automorfismo α. Dimostrare che la funzione $f : G \longrightarrow H = G \times G$ definita da $f(x) = (x, \alpha(x))$ è un morfismo. Trovare il nucleo di f. Dimostrare che $K = \mathrm{Im}(f)$ è un sottogruppo normale di H. Provare che porre, per ogni $(x,y)K \in H/K$, $\Phi((x,y)K) = x\alpha^{-1}(y^{-1})$ definisce un morfismo suriettivo da H/K in G. Dire se Φ è iniettivo.

Esercizio 3 Siano $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ due gruppi ciclici di ordine 3, e poniamo $V = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Sia α l'automorfismo di V definito da $\alpha(a^i, b^j) = (a^{-j}, b^i)$. Trovare l'ordine di α. Nell'insieme $G = V \times \langle \alpha \rangle$, definiamo una operazione ponendo $(u, \beta)(v, \gamma) = (u\beta(v), \beta\gamma)$. Con questa operazione G è un gruppo (NON dovete dimostrarlo). Per ogni p divisore primo dell'ordine di G, determinare il numero di p-sottogruppi di Sylow. Provare quindi che esiste $H \leq S_9$, isomorfo a G.

Esercizio 4 Siano G un gruppo ed Ω un insieme con almeno due elementi. Per ogni $f \in \Delta = \Omega^G$ ed ogni $x \in G$, definiamo $x.f \in \Delta$ ponendo, per ogni $a \in G$, $(x.f)(a) = f(x^{-1}a)$. provare che, in questo modo, si definisce una azione di G su Δ. Dire se l'azione è fedele e se è transitiva. Nel caso in cui G abbia ordine 11 e Ω abbia cardinalità 2 , calcolare il numero di orbite di G.