I seguente risultati sono stati enunciati durante le ore di esercitazioni e pertanto sono inseriti nel programma d'esame. Del secondo è richiesta pure la dimostrazione.

Lemma 1 (Lemma di Gauss) *Sia D un dominio a fattorizzazione essenzialmente unica e sia F il suo campo delle frazioni. Supponiamo che $f(X)$ sia un polinomio non nullo a coefficienti in D e supponiamo che $f = g \cdot h$ per qualche $g, h \in F[X]$. Allora esistono due polinomi $g_0, h_0 \in D[X]$ per cui $f = g_0 \cdot h_0$. Inoltre $g_0(X) = \alpha \cdot g(X)$ e $h_0(X) = \beta \cdot h(X)$, per opportuni $\alpha, \beta \in F$. In particolare, $deg(g_0) = deg(g)$ e $deg(h_0) = deg(h)$.*

Theorem 1 (Criterio di Eisenstein) *Sia D un dominio a fattorizzazione essenzialmente unica e sia F il suo campo delle frazioni. Sia $f(X) \in D[X]$ il polinomio*

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

con $a_i \in D$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Assumiamo che esista un elemento primo $\pi \in D$ per cui accadono i seguenti tre fatti

1. $\pi \nmid a_n$.
2. $\pi | a_i$ *per ogni* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
3. $\pi^2 \nmid a_0$.

Allora $f(X)$ è irriducibile in $F[X]$.

Proof. Per assurdo sia f riducibile in $F[X]$, allora per il Lemma 1 di Gauss possiamo scrivere $f = g \cdot h$, con g ed h in $D[X]$ entrambi polinomi di grado positivo.
Sia $\overline{D} := D / \langle \pi \rangle$ ed estendiamo l'omomorfismo naturale $d \in D \mapsto \overline{d} \in \overline{D}$ ad un omomorfismo di anelli

$$\begin{aligned} D[X] &\longrightarrow \overline{D}[X] \\ f(X) &\mapsto \overline{f}(X). \end{aligned}$$

Per le condizioni 1. e 2. abbiamo che

$$\overline{g} \cdot \overline{h} = \overline{f} = \overline{a}_n X^n \neq 0.$$

Mostriamo che $\overline{g} = \overline{b} X^k$ e $\overline{h} = \overline{c} X^l$, per opportuni $b, c \in D$ ed interi positivi k ed l. Infatti poiché π è un elemento primo di D, $\overline{D}$ è un dominio d'integrità, pertanto $\overline{D}$ è contenuto in qualche campo K (ad esempio il suo campo delle frazioni). Quindi possiamo vedere la fattorizzazione $\overline{f} = \overline{g} \cdot \overline{h}$ all'interno dell'anello $K[X]$. In tale anello $\overline{f}$ è un multiplo di una potenza del polinomio irriducibile X, pertanto per l'unicità della fattorizzazione in $K[X]$, entrambi $\overline{g}$ ed $\overline{h}$ sono multipli di potenze di X, come volevasi provare. Per vedere che k ed l sono entrambi positivi è sufficiente notare che $k = deg(\overline{g}) \leq deg(g)$ e

$l = deg(\overline{h}) \leq deg(h)$. Poiché $n = k + l \leq deg(g) + deg(h) = deg(f) = n$, si ha dappertutto l'uguale e quindi $k = deg(g) > 0$ ed $l = deg(h) > 0$.
Ne segue che i termini noti di $\overline{g}$ e di $\overline{h}$ sono entrambi nulli, ovvero i termini noti dei polinomi g ed h sono entrambi divisibili per π. Poiché a_0, il termine noto di f, è il prodotto di questi, si conclude che π^2 divide a_0, il che contraddice l'ipotesi 3., da cui l'assurdo ed il polinomio f è irriducibile in $F[X]$. $\square$