Principio di inclusione ed esclusione e numero di funzioni suriettive

Siano X ed Y due insiemi finiti, con $|X| = n$ e $|Y| = m$. Abbiamo visto (Proposizione 2.11) che, quando $m \geq n$, il numero di funzioni **iniettive** da X ad Y è dato da

$$D(m,n) = m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

(chiaramente, se $m < n$ non esistono applicazioni iniettive da X in Y, per cui potremmo porre $D(m,n) = 0$ se $m < n$); se $n = m$ si ha - come deve essere - $D(n,n) = n!$.

Vogliamo ora una formula in m ed n che dia il numero di applicazioni **suriettive** da X in Y, che denoteremo con $\mathcal{S}(n,m)$. Chiaramente, se $n < m$ non ci sono applicazioni suriettive da X in Y, dunque

$$\mathcal{S}(n,m) = 0 \quad \text{se} \quad n < m.$$

Osserviamo anche che dovrà essere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n,n) = n!$

Proviamo che, per ogni $1 \leq m \leq n$, si ha

$$\mathcal{S}(n,m) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n. \tag{1}$$

La nostra dimostrazione ricorre al cosiddetto principio di inclusione-esclusione. Questo, nella sua forma più semplice, non è altro che la formula generale che esprime la cardinalità di un'unione finita di insiemi finiti (si tratta della generalizzazione del secondo punto della Proposizione 2.9 a cui si fa cenno dopo l'enunciato di quella). Precisamente:

P.I.E. (Principio di Inclusione ed Esclusione) *Sia U un insieme finito e sia $\{A_1, \ldots, A_k\}$ una famiglia di sottoinsiemi di U. Allora*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|. \tag{2}$$

Dimostreremo P.I.E. in seguito, veniamo ora alla questione delle applicazioni suriettive. Per ogni $y \in Y$ denotiamo con A_y l'insieme delle funzioni $\phi : X \to Y$ tali che $y \notin Im(\phi)$ (ovvero $Im(\phi) \subseteq Y \setminus \{y\}$). Banalmente, dunque, l'insieme delle applicazioni suriettive da X in Y è

$$Y^X \setminus \bigcup_{y \in Y} A_y,$$

quindi

$$\mathcal{S}(n,m) = |Y^X| - \Big| \bigcup_{y \in Y} A_y \Big|. \tag{3}$$

Per ogni $Z \subseteq Y$ denotiamo con A_Z l'insieme di tutte le applicazioni $\phi : X \to Y$ tali che $Im(\phi) \subseteq Y \setminus Z$; se $|Z| = j$ (con $0 \leq j \leq m = |Y|$), si ha

$$|A_Z| = |(Y \setminus Z)^X| = (m-j)^n. \tag{4}$$

Inoltre, chiaramente,

$$A_Z = \bigcap_{y \in Z} A_y$$

Applicando la formula (2):

$$\Big| \bigcup_{y \in Y} A_y \Big| = \sum_{\emptyset \neq Z \subseteq Y} (-1)^{|Z|+1} \Big| \bigcap_{y \in Z} A_y \Big| = \sum_{\emptyset \neq Z \subseteq Y} (-1)^{|Z|+1} |A_Z|$$

e quindi

$$\Big| \bigcup_{y \in Y} A_y \Big| = \sum_{1 \leq j \leq m} \binom{m}{j} (-1)^{j+1} (m-j)^n = -\sum_{1}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n.$$

Finalmente, dalla (3), ricaviamo la formula voluta

$$\mathcal{S}(n,m) = n^m + \sum_{1}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n = \sum_{0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n.$$

Dimostrazione di P.I.E.

Per ogni sottoinsieme $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ poniamo

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

in particolare $A_\varnothing = U$ (si osservi che maggiore è il numero di sottoinsiemi che si intersecano minore diventa l'intersezione; pertanto l'intersezione di nessun sottoinsieme fornisce il più grande insieme possibile, cioè in questo caso U). Con queste notazioni la tesi da provare diventa pertanto

$$|U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{|I|} |A_I|. \tag{5}$$

Ora osserviamo che la sommatoria a destra è una combinazione lineare delle cardinalità degli insiemi A_I, con coefficienti $+1$ o -1. Ora per ogni punto u di U calcoliamo il suo "contributo" in questa sommatoria, cioè per ogni $u \in U$ calcoliamo la somma dei coefficienti degli insiemi A_I che lo contengono.

Se u non appartiene a nessun insieme A_i, allora l'unico termine della sommatoria a cui u fornisce contributo è $I = \varnothing$, ed tale contributo è $+1$.

Altrimenti, l'insieme $J = \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} | u \in A_i\}$ è non vuoto, e $u \in A_I$ se e solo se $I \subseteq J$. Ne segue che il contributo del punto u è esattamente

$$\sum_{I \subseteq J} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i = (1-1)^j = 0,$$

dove $j = |J|$.

Pertanto, i punti che non appartengono a nessun insieme A_i danno contributo $+1$ alla sommatoria, mentre i punti che appartengono a qualche A_i contributo 0. Quindi la sommatoria in 5 calcola esattamente il numero di punti che non appartengono a nessuno degli A_i, e ciò completa la dimostrazione.