Media aritmetica contro media geometrica

Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri reali con $a_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
La *media aritmetica* dei valori $a_1, \ldots, a_n$ è

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n};$$

mentre la loro *media geometrica* è

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Proviamo che, per ogni $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty)$,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}. \tag{1}$$

Cominciamo con l'osservare che la (1) è equivalente a

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdots a_n \tag{2}$$

Esistono diverse dimostrazioni di questo fatto; quella che vediamo, che fa uso del principio di induzione in una maniera relativamente insolita e istruttiva, è dovuta a L. A. Cauchy.

passo1. *(2) è vera per $n = 2$.*

Infatti, dalla diseguaglianza elementare $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$, segue

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \geq 4a_1a_2.$$

passo 2. *Se (2) è vera per n allora è vera per $2n$.*

Infatti, se la disuguaglianza sussiste per n termini, allora, utilizzando anche il passo 1,

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_{2n} &= (a_1 \cdots a_n)(a_{n+1} \cdots a_{2n}) \leq \left[\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right]^n \leq \\ &\leq \left[\frac{1}{4}\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}\right)^2\right]^n = \\ &= \left[\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{2n} + \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{2n}\right)^2\right]^n = \left[\frac{a_1 + \ldots + a_{2n}}{2n}\right]^{2n}. \end{aligned}$$

passo 3. *Per ogni $t \geq 0$ la (2) è vera per $n = 2^t$.*

Applicando il passo 1 per $t = 1$ e quindi, grazie al passo 2, con una semplice induzione su t.

passo 4. *(2) è vera per ogni n.*

Sia $n \geq 2$ e sia m il minimo intero positivo tale che $2^m \geq n$. Se $n = 2^m$ la cosa è già stata provata; supponiamo quindi che $s = 2^m - n \geq 1$. Dati i nostri n termini $a_1, \ldots a_n$, poniamo

$$M = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(ovvero: $a_1 + \ldots + a_n = nM$), e consideriamo dei termini aggiuntivi

$$a_{n+1} = \ldots = a_{n+s} = M.$$

Allora

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} \ldots + a_{n+s}}{n+s} = \frac{a_1 + \ldots + a_n + sM}{n+s} = \frac{nM + sM}{n+s} = M.$$

Poiché $n + s = 2^m$, per il passo 3 si ha quindi

$$(a_1 \cdots a_n)M^s = a_1 \cdots a_{n+s} \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n+s}}{n+s}\right)^{n+s} = M^{n+s}$$

da cui

$$a_1 \cdots a_n \leq \ M^n$$

che è quello che si voleva provare.