Il seguente risultato è stato dimostrato durante le ore di esercitazioni ed è inserito nel programma d'esame.
Riportiamo l'enunciato e la dimostrazione per coloro che non hanno potuto partecipare alla lezione.

Theorem 1 (Argomento di Frattini) *Sia G un gruppo finito e sia N un sottogruppo normale di G. Se $P \in Syl_p(N)$ è un $p-$sottogruppo di Sylow di N (per qualche primo p), allora $G = N_G(P) \cdot N$.*

Proof. Preso un arbitrario elemento $g \in G$ il sottogruppo $P^g = g^{-1}Pg$ sta in N, essendo quest'ultimo normale in G. Inoltre $|P^g| = |P|$, quindi sia P che P^g sono due $p-$Sylow di N. Per il (secondo) Teorema di Sylow, questi sono pertanto coniugati *in* N, ovvero esiste $n \in N$ tale per cui

$$P^g = P^n.$$

Ne segue che $P^{gn^{-1}} = P$, ovvero l'elemento gn^{-1} normalizza P, i.e. $gn^{-1} \in N_G(P)$ e $g \in N_G(P)n \subseteq N_G(P) \cdot N$. Data la genericità con cui si è scelto $g \in G$, abbiamo provato che $G = N_G(P) \cdot N$, cioè la tesi. $\square$