Formula di Frobenius

Siano G un gruppo finito ed Ω un insieme finito su cui G agisce. Se $n(G,\Omega)$ è il numero di orbite di G su Ω, proveremo che si ha

$$n(G,\Omega) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)|$$

Iniziamo col definire l'insieme $\mathcal{X} = \{(\omega,g) \mid \omega g = \omega\}$. Per ogni $g \in G$ definiamo $\Delta(g) = \{(\omega,g) \mid \omega \in \mathrm{fix}(g)\}$ e $\Gamma(\omega) = \{(\omega,g) \mid g \in G_\omega\}$. Si vede immediatamente che $\Delta(g) = \mathrm{fix}(g) \times \{g\}$ e $\Gamma(\omega) = \{\omega\} \times G_\omega$. Pertanto, se $g,h \in G$ sono distinti $\Delta(g) \cap \Delta(h) = \emptyset$ e $\mathcal{X} = \bigcup_{g\in G}\Delta(g)$. Analogamente, presi $\omega,\delta \in \Omega$ distinti, $\Gamma(\omega) \cap \Gamma(\delta) = \emptyset$ e $\mathcal{X} = \bigcup_{\omega\in\Omega}\Gamma(\omega)$. Passando agli ordini otteniamo

$$|\mathcal{X}| = \sum_{g\in G}|\Delta(g)| = \sum_{\omega\in\Omega}|\Gamma(\omega)|$$

da cui

$$\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)| = \sum_{\omega\in\Omega}|G_\omega|$$

Siano $\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_n$ le orbite di G su Ω (quindi $n = n(G,\Omega)$) e, usando il fatto che Ω è unione disgiunta delle orbite $\mathcal{O}_i$, riscriviamo quest'ultima uguaglianza come

$$\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\omega\in\mathcal{O}_i}|G_\omega|$$

Ricordiamo ora che, se $\omega \in \mathcal{O}_i$, allora $|G_\omega| = |G| \,/\, |\mathcal{O}_i|$. Si ottiene allora

$$\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\omega\in\mathcal{O}_i}\frac{|G|}{|\mathcal{O}_i|} = |G|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\omega\in\mathcal{O}_i}\frac{1}{|\mathcal{O}_i|} = |G|\sum_{i=1}^{n}1 = |G|\,n$$

e da questo si ricava la formula di Frobenius.

Vedremo ora una applicazione della formula appena dimostrata. Il problema che ci proponiamo di risolvere è quello di contare quante collane diverse si possono ottenere con n perle di k colori diversi. Prendiamo un n-agono regolare e coloriamo i suoi vertici usando i k colori scelti. Indichiamo con Ω l'insieme di tutti gli n-agoni ottenibili in questo modo. Ovviamente Ω ha cardinalità k^n. Il nostro problema si riduce quindi a trovare il numero di orbite del gruppo diedrale D_{2n} nella sua azione naturale su Ω. Ricordiamo che, indicati con ρ la rotazione di $2\pi/n$ radianti, e con σ un ribaltamento attorno ad un asse di simmetria, abbiamo $D_{2n} = \{\rho^i\sigma^j \mid 0 \leq i < n,\ j = 0, 1\}$. Iniziamo col calcolare i punti fissi degli elementi del tipo $\rho^i\sigma$. Questi sono tutti ribaltamenti ma, a seconda che n sia pari o dispari, ci possono essere comportamenti diversi.

Caso 1 *n è dispari.*

In questo caso ogni ribaltamento fissa un vertice. Se V è uno dei vertici rimanenti, allora viene scambiato col vertice simmetrico rispetto all'asse di ribaltamento. Possiamo allora dividere gli $n-1$ vertici non fissati da $\rho^i\sigma$ in $(n-1)/2$ coppie, e $\rho^i\sigma$ scambia tra loro gli elementi di ciascuna coppia. Una colorazione è quindi fissata da $\rho^i\sigma$ se e solo se i vertici in ciascuna di queste coppie hanno lo stesso colore. Si deduce quindi che $\rho^i\sigma$ fissa $k^{(n-1)/2}k = k^{(n+1)/2}$ punti di Ω.

Caso 2 *n è pari.*

In questo caso i ribaltamenti sono di due tipi:

1. ribaltamenti attorno ad un asse passante per due vertici o

2. ribaltamenti attorno ad un asse passante per i punti medi di due lati.

È immediato verificare, usando argomenti analoghi a quello usato in precedenza, che, nel primo caso, il numero di punti fissi è $k^{(n+2)/2}$, mentre nel secondo caso vengono fissati $k^{n/2}$ punti di Ω. Osserviamo inoltre che i ribaltamenti di ciascuno dei due tipi sono $n/2$.

Passiamo ora ad analizzare i punti fissi di delle potenze di ρ. Il modo più conveniente per studiare questo problema è quello di pensare ρ come una permutazione sui vertici. In questo modo possiamo identificarlo con il ciclo $(1234\ldots n)$. Se $\alpha \in S_m$ è un ciclo di lunghezza l si è dimostrato che α^i è prodotto di l/d cicli disgiunti, ciascuno di lunghezza d, dove $d = l/M.C.D.(l, i)$. Nel nostro caso poniamo $d = n/M.C.D.(n, i)$ e scriviamo $\rho^i = \rho_1 \cdots \rho_{n/d}$ con i ρ_j cicli disgiunti. È facile convincersi che una colorazione del nostro n-agono è lasciata fissa da ρ^i se e solo se, per ogni $j = 1, \ldots, n/d$ i vertici in $\mathrm{supp}(\rho_j)$ hanno tutti lo stesso colore. Di conseguenza ρ^i ha $k^{n/d}$ punti fissi. Osserviamo anche che le potenze di ρ di ordine d sono esattamente $\varphi(d)$. Abbiamo ora tutte le informazioni necessarie per applicare la formula di Frobenius.

Caso 1 *n dispari.*

1. Gli elementi del tipo $\rho^i\sigma$ sono n e ciascuno fissa $k^{(n+1)/2}$ punti di Ω.

2. Le potenze di ρ (compresa l'identità) fissano, in totale, $\sum_{d|n}\varphi(d)k^{n/d}$ elementi di Ω.

Abbiamo quindi che il numero di collane differenti ottenibili è

$$\frac{1}{2n}\left\{nk^{(n+1)/2}+\sum_{d|n}\varphi(d)k^{n/d}\right\}$$

Caso 2 *n pari.*

In questo caso l'unica differenza è che occorre tener conto dei due differenti tipi di ribaltamenti. Il numero di collane ottenibili è

$$\frac{1}{2n}\left\{\frac{n}{2}(k^{(n+2)/2}+k^{n/2})+\sum_{d|n}\varphi(d)k^{n/d}\right\}$$