Seconda prova parziale di Algebra 2
A.A. 2011/2012

Esercizio 1. Sia G il seguente sottogruppo di $GL(2, \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}})$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| a, b \in \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}, a \neq 0 \right\}.$$

1. Determinare $|G|$ e provare che l'elemento $x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ ha periodo 10.
2. Mostrare che $|C_G(x)| = 10$ e che G contiene almeno 11 elementi di periodo 10.
3. Per ogni divisore primo p di $|G|$ determinare il numero dei p-Sylow di G.
4. Mostrare che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_{11}.

Esercizio 2. Se p un numero primo e sia

$$f_p(x) = \sum_{j=0}^{p-1} (-x)^j \in \mathbb{Q}[x].$$

Provare che f_p è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$. (Sugg. può essere utile considerare il polinomio $f(-x)$).
Siano $v = \sqrt[5]{3}$ ed $\epsilon \in \mathbb{C}$ una radice primitiva decima dell'unità.

1. Determinare il polinomio minimo di ϵ ed il grado di $\mathbb{Q}[\epsilon]$ su $\mathbb{Q}$.
2. Provare che $\mathbb{Q}[\epsilon] = \mathbb{Q}[\epsilon^2]$.
3. Mostrare che $\mathbb{E} = \mathbb{Q}[v, \epsilon]$ è di Galois su $\mathbb{Q}$.
4. Il gruppo $Gal(\mathbb{E}, \mathbb{Q})$ è abeliano?
5. Mostrare che esiste un unico $\mathbb{L}$ contenuto in $\mathbb{E}$ di grado 4 su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Siano $n \in \mathbb{N}$, p un primo ed $\mathbb{F}$ un campo finito d'ordine p^n. Provare quanto segue

1. Per ogni divisore d di n esiste un unico sottocampo $\mathbb{F}_d$ di $\mathbb{F}$ con $|\mathbb{F}_d| = p^d$.
2. $\bigcup_{d|n, d\neq n} \mathbb{F}_d \neq \mathbb{F}$.
3. $\mathbb{F} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[a]$ per qualche $a \in \mathbb{F}$.