II Compitino di Algebra 2
11/01/2008

Esercizio 1 (10 punti) Sia G un gruppo d'ordine 24. Si provi nell'ordine quanto segue.

1. G non è semplice.
2. Se G possiede un $3-$Sylow normale T allora
   (a) G ammette un sottogruppo normale N d'ordine 4.
   (b) N è contenuto in ogni $2-$sottogruppo di Sylow di G.
   (c) $G = TD$, ove D è un qualunque $2-$Sylow di G.
   (d) 2 divide l'ordine del centro di G.
3. Se $2 \not| |Z(G)|$ allora G è isomorfo al gruppo simmetrico S_4.

Esercizio 2 (6 punti) Sia $\mathbb{F}_5$ il campo d'ordine 5 e sia $\mathbb{K}$ il campo di spezzamento su $\mathbb{F}_5$ del polinomio $X^2 + 2$.

1. Mostrare che esiste $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5[\alpha]$ e $\alpha^2 = 3$.
2. Identificato $\mathbb{K}$ con l'insieme $\{a + b\alpha | a, b \in \mathbb{F}_5\}$, esprimere α^{-1} come combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{F}_5$ nella base $\{1, \alpha\}$.
3. Dire se il polinomio $f(X) = X^2 + X + 1$ è irriducibile su $\mathbb{F}_5$. Posto $\mathbb{H}$ il campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_5$, dire se $\mathbb{H}$ e $\mathbb{K}$ sono campi isomorfi e motivare la risposta.
4. Provare che $f(X)$ ha tutti zeri in $\mathbb{K}$ e determinare le espressioni di tali zeri in termini della base $\{1, \alpha\}$.

Esercizio 3 (6 punti) Si consideri sul campo $\mathbb{Q}$ dei razionali il polinomio $f(X) = X^4 - 6X^2 + 6$. Determinare la struttura del gruppo di Galois di f su $\mathbb{Q}$. Posto $\mathbb{K}$ il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$, indicare tutti i campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}$ e dire quali fra essi sono estensioni normali su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4 (8 punti) Sia G un gruppo finito. Supponiamo che G ammetta un sottogruppo non banale N che sia *ciclico* e *normale*. Mostrare allora che esiste un numero primo p che divide $|G|$ per cui l'intersezione di tutti i $p-$sottogruppi di Sylow di G è non banale.