Seconda prova intermedia di ALGEBRA 2
10 gennaio 2017

Esercizio 1. *Sia G un gruppo finito d'ordine* 2035*.*

1. *Provare che per ogni divisore u del suo ordine G ammette almeno un sottogruppo d'ordine u.*
2. *Dimostrare che* 37 *divide l'ordine di $Z(G)$.*
3. *Posto $r := |\{g \in G \,|\, |g| = 5\}|$ provare che $r = 44$ oppure $r = 4$ e G è ciclico.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{F}_7$ il campo d'ordine 7 e sia $\mathbb{E}$ il campo di spezzamento del polinomio $x^2 + 4 \in \mathbb{F}_7[x]$ su $\mathbb{F}_7$.*

1. *Provare che il polinomio $g = x^2 + 2$ ha uno zero in $\mathbb{E}$ e che esiste una base di $\mathbb{E}$ su $\mathbb{F}_7$ del tipo $\{1, \alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{E}$ tale che $\alpha^2 = 5$.*
2. *Scrivere $2 + \alpha^{-1}$ come combinazione lineare di $\{1, \alpha\}$.*
3. *Dire, motivando la risposta, se il polinomio $f(x) = x^6 + 6x^4 + 3 \in \mathbb{F}_7[x]$ è separabile su $\mathbb{F}_7$.*
4. *Detto $\mathbb{K}$ il campo di spezzamento di f su $\mathbb{F}_7$, calcolare $|\mathbb{K} : \mathbb{F}_7|$ e dire se $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{K}$.*

Esercizio 3. *Siano $u = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $v = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ed $\mathbb{E} = \mathbb{Q}[u]$. Provare che $v \in \mathbb{E}$. Trovare il polinomio minimo di $u + v$ su $\mathbb{Q}$ e provare che $\mathbb{E}$ è il campo di spezzamento di $g = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ su $\mathbb{Q}$. Determinare il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$ e dire se $\mathbb{E}$ è campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$. Sia $G = \mathcal{G}al(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$. Determinare l'ordine di G e la sua classe di isomorfismo. Elencare tutti i sottocampi di $\mathbb{E}$. Dopo aver mostrato che $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ è una $\mathbb{Q}$-base di $\mathbb{E}$, usare questo fatto per provare che $r = \sqrt{-1 + \sqrt{3}}$ non appartiene ad $\mathbb{E}$.*