Compito di Algebra 2
01/02/2008

Esercizio 1 (8 punti) Sia

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 3^n & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \alpha = \frac{m}{3^k},\, n, m, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Mostrare che G è un gruppo rispetto al prodotto righe-per-colonne.
2. Posto $N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \alpha = \frac{m}{3^k},\, m, k \in \mathbb{Z} \right\}$, mostrare che N è un sottogruppo normale di G.
3. Provare che G/N è isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Z}$.
4. Provare che $G = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 2 (6 punti) Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi di G.

1. Posto Ω l'insieme dei laterali sinistri di H in G, mostrare che la seguente applicazione
$$\begin{aligned} \Omega \times K &\longrightarrow \Omega \\ (Hg, k) &\mapsto Hgk \end{aligned}$$
definisce un'azione di K su Ω.
2. Esprimere lo stabilizzatore (rispetto tale azione) del laterale Hg come un'intersezione di sottogruppi di G.
3. Calcolare il nucleo dell'azione.
4. Calcolare la cardinalità dell'insieme $HgK := \{hgk | h \in H, k \in K\}$ nel caso: $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle$, $K = \langle(13)\rangle$ e $g = (23)$.

Esercizio 3 (9 punti) Sia E il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ del polinomio

$$f(X) := X^7 - 3.$$

1. Calcolare l'ordine del gruppo di Galois $G := Gal(E|\mathbb{Q})$.
2. Quanti sono i $7-$Sylow di G? Indicare per ciascuno di essi il campo corrispondente e dire quali fra questi campi sono estensioni normali su $\mathbb{Q}$.
3. Detta α la radice reale di $f(X)$, che ordine ha il sottogruppo $Gal(E|\mathbb{Q}[\alpha])$? È questo un sottogruppo normale di G?
4. Mostrare che G ha esattamente sette sottogruppi d'ordine 6.

Esercizio 4 (7 punti) Sia G un gruppo e sia $Z := Z(G)$ il centro di G.
Indichiamo con $\mathrm{Hom}(\frac{G}{Z}, Z) := \left\{\text{omomorfismi } \sigma : \frac{G}{Z} \longrightarrow Z\right\}$.
Per ogni $\sigma \in \mathrm{Hom}(\frac{G}{Z}, Z)$ sia

$$\begin{aligned} f_\sigma : G &\longrightarrow G \\ g &\mapsto g\sigma(Zg). \end{aligned}$$

Si provi quanto segue.

1. Per ogni $\sigma \in \mathrm{Hom}(\frac{G}{Z}, Z)$, f_σ è un automorfismo di G.
2. $H := \left\{f_\sigma | \sigma \in \mathrm{Hom}(\frac{G}{Z}, Z)\right\}$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}\,(G)$.
3. $H \trianglelefteq \mathrm{Aut}\,(G)$.