Prima prova intermedia di ALGEBRA 2
30 novembre 2016

Esercizio 1. *Provare che ponendo*

$$\begin{aligned} \psi : G = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}} \\ (a + 6\mathbb{Z}, b + 10\mathbb{Z}) &\longmapsto 5a + 3b + 15\mathbb{Z} \end{aligned}$$

si definisce un omomorfismo di gruppi. Trovare $K = \ker(\psi)$.

Posto $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \{0\}$ *e* $B = \{0\} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, *determinare* $K \cap A$ *e* $K \cap B$. *Dire, motivando la risposta, se* K *e* G/K *sono ciclici.*

Esercizio 2. *Sul prodotto cartesiano* $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ *si consideri la seguente operazione*

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + ac + d),$$

per ogni $(a, b), (c, d) \in G$.

1. *Provare che* $(G, *)$ *è un gruppo abeliano, tralasciando di verificare che* $*$ *è associativa;*
2. *calcolare l'ordine degli elementi* $(2, 0)$ *e* $(0, 2)$ *di* G *e dire se* G *è ciclico;*
3. *provare che l'applicazione* $\varphi : G \longrightarrow G$ *definita da* $\varphi(a, b) = (-a, a^2 - b)$, *per ogni* $(a, b) \in G$ *è un automorfismo di* G *di periodo due;*
4. *determinare il sottogruppo costituito dagli elementi di* G *che sono fissati da* φ*;*
5. *trovare un elemento di* G *di periodo 4.*

Esercizio 3. *Nel gruppo simmetrico* S_6 *si consideri*

$$H = \{\sigma \in S_6 | 1\sigma = 1 \text{ e } 6\sigma = 6\}.$$

1. *Provare che* H *è un sottogruppo di* S_6*;*
2. *detto* $\tau = (2435)(16)$, *provare che* $\tau \in N_{S_6}(H)$, *cioè che* $H^\tau = H$*;*
3. *provare che* $\langle H, \tau \rangle = \left\{ h\tau^i | h \in H, i \in \mathbb{Z} \right\}$*;*
4. *detto* $N = \langle H, \tau \rangle$ *determinare* $|N : H|$.

Esercizio 4. *Siano* G *un gruppo ed* N *un suo sottogruppo normale ciclico. Dimostrare che, se* $L \leq N$, *allora* L *è normale in* G.