**Prima prova intermedia di ALGEBRA 1**
**11 gennaio 2017**

**Esercizio 1.** *(4 punti) Provare la seguente formula per ogni* $n \geq 1$

$$2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$

**Esercizio 2.** *(6 punti) Siano* $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2, m \geq 2$*, e sia* $d = (n, m)$ *il loro massimo comune divisore. Provare che la seguente legge*

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} \\ (a + n\mathbb{Z}, b + m\mathbb{Z}) &\longmapsto ab + d\mathbb{Z} \end{aligned}$$

*definisce un'applicazione.*
*Dire inoltre se* $\varphi$ *è suriettiva, motivando la risposta.*

**Esercizio 3.** *(12 punti) Sia* $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$*. Per ogni* $m, n \in A$ *si ponga*

$$m \simeq n \quad \textit{se e solo se} \quad \forall p \textit{ primo positivo vale che: } p|m \Leftrightarrow p|n.$$

1. Provare che $\simeq$ è una relazione d'equivalenza su $A$.
2. Determinare la classe contenente il numero 6 e la sua cardinalità.
3. Determinare un sistema di rappresentanti per l'insieme quoziente $\Omega := A/\simeq$.

Per ogni $[a]_\simeq, [b]_\simeq \in \Omega$ si ponga

$$[a]_\simeq \preceq [b]_\simeq \quad \text{se e solo se} \quad \forall p \text{ primo positivo: } p|a \Rightarrow p|b.$$

4. Provare che $\preceq$ definisce una relazione di ordine su $\Omega$. Dire se $(\Omega, \preceq)$ è totalmente ordinato.
5. Determinare gli eventuali elementi minimali/massimali, minimo/massimo.
6. Determinare infine Sup e Inf del sottoinsieme $\{[10]_\simeq, [12]_\simeq\}$.

**Esercizio 4.** *(8 punti) Trovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza*

$$12x^{41} + 13x^{11} \equiv 7x + 3 \quad (\textit{mod } 55).$$