Compito di Algebra 2
16/01/2008

Esercizio 1 (8 punti) Sia α il numero complesso $\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

1. Si determini il polinomio minimo f di α su $\mathbb{Q}$ ed il campo di spezzamento $\mathbb{K}$ di f su $\mathbb{Q}$.
2. Trovare il gruppo di Galois $Gal(\mathbb{K}|\mathbb{Q})$.
3. Trovare i sottocampi $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ tali che l'estensione $\mathbb{F}|\mathbb{Q}$ è normale.

Esercizio 2 (6 punti) Sia G l'insieme delle matrici 2×2 della forma

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

1. Mostrare che G è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.
2. Trovare l'ordine di G ed il periodo degli elementi $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Trovare i sottogruppi di Sylow di G.
4. G è un gruppo ciclico?

Esercizio 3 (10 punti) Sia X un insieme non vuoto e sia A un gruppo. Sia inoltre G l'insieme di tutte le funzioni da X in A. G, munito della seguente operazione

$$f \cdot g(x) := f(x)g(x), \quad \forall f, g \in G, \forall x \in X,$$

è un gruppo (**non lo si dimostri**).

1. Per ogni $x \in X$ sia $\sigma_x : G \longrightarrow A$ definita da $\sigma_x(f) = f(x)$, per ogni $f \in G$. Mostrare che σ_x è un morfismo suriettivo.
2. Sia $H := \{f \in G | f(x) = f(y) \, \forall x, y \in X\}$. Mostrare che H è un sottogruppo di G.
3. Posto per ogni $x \in X$, $K_x := \{f \in G | f(x) = 1_A\}$. Mostrare che K_x è un sottogruppo normale di G e che $K_x \cap H = 1_G$.
   (1_A e 1_G sono gli elementi neutri rispettivamente di A e di G).
4. Provare che se G è un gruppo finito allora $G = HK_x$ per ogni $x \in X$.
5. Se G è infinito è ancora vero che $G = HK_x$?

Esercizio 4 (6 punti) Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi di G. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \theta : (H \times K) \times G &\longrightarrow G \\ ((h, k), g) &\mapsto hgk^{-1} \end{aligned}$$

Mostrare che θ definisce un'azione di $H \times K$ sull'insieme G.
Nel caso in cui sia $G = S_3$, $H = \langle (12) \rangle$ e $K = \langle (23) \rangle$, trovare le orbite di tale azione.