Compito di Algebra 1
19/9/11

Esercizio 1 Sia $\mathbb{F}$ un campo. Nell'insieme $\mathbb{F}[x]$ si consideri la seguente relazione: $f \sim g$ se 1 è uno zero di $f - g$. Dire se $\sim$ è una relazione di equivalenza. In caso affermativo si trovi la cardinalità di $\mathbb{F}[x]/\sim$ quando $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 2 Siano A un anello commutativo ed I un ideale di A. Fissato $\Omega \subseteq A$, dimostrare che l'insieme

$$X(\Omega) = \{f \in A[x] \mid f(\omega) \in I \text{ per ogni } \omega \in \Omega\}$$

e un ideale di $A[x]$. Nel caso in cui $A = \mathbb{Q}$ e $I = 0$, dimostrare che $X(\Omega)$ è diverso da 0 se e solo se Ω è finito. Dire in quali casi, sempre nell'ipotesi $A = \mathbb{Q}$ e $I = 0$, $X(\Omega)$ è massimale.

Esercizio 3 Per ogni elemento $\alpha = a + b\sqrt{2}$ dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, definiamo $\mathrm{R}(\alpha) = a$ e $\mathrm{I}(\alpha) = b$. Fissato $n \in \mathbb{Z}$ sia $K = (n)$. Dimostrare che $\alpha + K = \beta + K$ se e solo se $n \mid (\mathrm{R}(\alpha) - \mathrm{R}(\beta))$ e $n \mid (\mathrm{I}(\alpha) - \mathrm{I}(\beta))$. Usare questo fatto per provare che, se $n \neq 0$, l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/K$ ha cardinalità n^2.

Esercizio 4 Sia A l'anello $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$. Per ogni $f \in A$ definiamo la funzione $\overline{f}$ ponendo, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, $\overline{f}(z) = f(2z)$. Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} \sigma : A &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto \overline{f} \end{aligned}$$

è un morfismo di anelli. Dire se σ è iniettiva e/o suriettiva.