# Compito di Algebra 1
## 4/7/11

**Esercizio 1** Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione. Supponiamo che, per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ si abbia $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$. Dimostrare che $f$ è iniettiva e suriettiva.

**Esercizio 2** Dato l'insieme non vuoto $X$, si consideri l'anello $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$.

1. Se $A \in \mathcal{P}(X)$ è un sottoinsieme con $n$ elementi, si dica quanti elementi possiede $(A)$, l'ideale principale generato da $A$.
2. Se $I$ è un ideale e $A, B \in I$, dimostrare che $A \cup B \in I$.
3. Se $X$ è finito ed $I$ è un ideale di $\mathcal{P}(X)$, dimostrare che $I$ possiede un unico elemento $U_I$ di ordine massimo.
4. Se $X$ è finito dimostrare che ogni ideale di $\mathcal{P}(X)$ è principale.

**Esercizio 3** Siano $\mathbb{F}, \mathbb{K}$ due campi e si consideri un morfismo suriettivo di anelli $\tau : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$. Dimostrare i seguenti fatti.

1. Per ogni $a \in \mathbb{F}$ si ha $\tau(a) \in \mathbb{K}$.
2. $\mathbb{F}$ è isomorfo a $\mathbb{K}$.
3. $\tau$ è un isomorfismo.

**Esercizio 4** Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi e sia $A$ l'insieme delle matrici $2 \times 2$ della forma

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

1. Provare che $A$ è un sottoanello di $M_2(\mathbb{K})$
2. Dimostrare che la funzione $\sigma$ definita ponendo $\sigma(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}) = a + b$, è un morfismo da $A$ in $\mathbb{K}$
3. Determinare l'insieme $U$ degli elementi invertibili di $A$.
4. Dimostrare che $I = A \setminus U$ è un ideale e dire se $I$ è primo e/o massimale.