Compito di Algebra 1
5/9/11

Esercizio 1 Sia $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ e si consideri la relazione $\sim$ così definita:
$f \sim g$ *se esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $f(a) = g(a)$ *per ogni* a *tale che* $|a| > n$.

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Detta g la funzione definita da $g(x) = (-1)^{|x|}x \ \forall x \in \mathbb{N}$. Dire se $g \in [id_{\mathbb{N}}]$.

Esercizio 2 Dato l'insieme non vuoto X, si consideri l'anello $A = \mathbb{Q}^X$. Per ogni $f \in A$ si definisca $\Delta(f) = \{x \in X \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

1. Se $f, g \in A$ provare che $\Delta(f) \cap \Delta(g)$ è contenuto in $\Delta(f+g)$ e $\Delta(fg)$.
2. Provare che $B = \{f \in A \mid \complement\Delta(f)$ è finito $\}$ è un sottoanello di A.
3. Si dica per quali insiemi X l'anello B è un dominio.

Esercizio 3 Si provi che porre $\sigma(a, b + 6\mathbb{Z}) = 6a - 5b + 30\mathbb{Z}$, definisce un morfismo da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Dire se σ è iniettivo e/o suriettivo. Dire quindi se $\ker(\sigma)$ è un ideale primo o massimale.

Esercizio 4 Sia A l'insieme delle matrici

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

1. Provare che A è un campo e calcolare il suo ordine.
2. Provare che la funzione $\tau : A \longrightarrow A$ definita da $\tau(\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$ è un morfismo.
3. Trovare $\ker(\tau)$ e dire se τ è iniettivo e/o suriettivo.