II compitino di ALGEBRA 2
4 febbraio 2009

Esercizio 1 (16 punti). Sia $u = i\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.

1. Si determini il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$.
2. Sia $E \subseteq \mathbb{C}$ il campo di spezzamento di f. Si dica se $\sqrt[3]{3} \in E$.
3. Si determini $|Gal(E|\mathbb{Q})|$.
4. Si dica se esiste $i \neq \omega \in \mathbb{Q}[u]$ con $\omega^5 = 1$.

Esercizio 2 (4 punti). Sia $E|F$ un'estensione di campi, e siano $a, b \in E$, con a algebrico su F e b trascendente su F. Si provi che $F[a] \cap F[b] = F$.

Esercizio 3 (8 punti). Sia $f = x^6 + 2x^4 + x^2 + 2$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ (dove, come al solito, $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$). Si dica quante radici multiple ha f (in un campo di spezzamento). Si costruisca quindi un'estensione di $\mathbb{Z}_5$ in cui il polinomio f ha almeno una radice multipla.

Esercizio 4 (4 punti). Sia $E|F$ un'estensione algebrica (ma non necessariamente finita) di campi, e sia $G = Gal(E|F)$. Allora G opera su E. Si provi che per ogni $a \in E$, l'orbita di a per tale azione di G è finita.