I compitino di ALGEBRA 2 -recupero-
21 gennaio 2009

1. Sia $\mathbb{C}$ il campo complesso e sia p un numero primo qualsiasi. Sia

$$G := \{(a,b) | a, b \in \mathbb{C}, a^p = 1\}.$$

G, munito della seguente operazione, risulta essere un gruppo

$$(a,b) * (c,d) = (ac, ad + bc^{-1}).$$

(**Non si deve provare che** $(G,*)$ **è un gruppo!**).

   (a) Si mostri che l'insieme $N := \{(1,b) | b \in \mathbb{C}\}$ è un sottogruppo normale di G.
   (b) Provare che N è isomorfo al gruppo additivo del campo $\mathbb{C}$.
   (c) A cosa è isomorfo G/N?

2. Si considerino i seguenti elementi del gruppo simmetrico S_6

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

e sia ρ la permutazione $\sigma\tau$.

   (a) Scrivere ρ come prodotto di cicli disgiunti e dire quanti sottogruppi possiede il gruppo $< \rho >$.
   (b) Dire se σ e ρ sono coniugati in S_6.
   (c) Calcolare l'ordine del centralizzante in S_6 dell'elemento τ.

3. Provare che ogni gruppo d'ordine 132 non è semplice.