**Prima prova intermedia di ALGEBRA 2**
**27 novembre 2009**

**Esercizio 1** Si considerino i seguenti elementi del gruppo simmetrico $S_7$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Scrivere $\sigma$ e $\tau$ come prodotto di cicli disgiunti e calcolare $\sigma^{-1}\tau\sigma$.
2. Calcolare gli ordini di $\sigma$ e di $\tau$.
3. Calcolare il numero dei coniugati di $\tau$.

**Esercizio 2** Si provi che porre

$$f : \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}} \longrightarrow S_8$$
$$(a + 6\mathbb{Z}, b + 15\mathbb{Z}) \longmapsto (123)^a(45678)^b.$$

definisce un morfismo da $G = \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}$ in $S_8$. Trovare $K = \mathrm{Ker}(f)$, determinare l'ordine di $G/K$ e $K$ e dire se sono gruppi ciclici. Dire se $G$ è ciclico.

**Esercizio 3** Sia $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{C},\ ac \neq 0 \right\}$.

1. Provare che $G$ è un gruppo.
2. Provare che l'applicazione

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \longmapsto (a, c)$$

definisce un omomorfismo.

3. Detto $K$ il nucleo di $\varphi$, è vero che $G/K$ è un gruppo abeliano?
4. Sia $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \middle| \mid ac \mid = 1 \right\}$. Provare che $N$ è un sottogruppo normale di $G$. (Ricordiamo che, per un numero complesso $\alpha$, si pone $\mid \alpha \mid = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$)
5. Mostrare che $G/N \simeq \mathbb{R}_{>0}$.

**Esercizio 4** Siano $G$ un gruppo arbitrario ed $n \in \mathbb{N}$. Definiamo $X = \{g^n | g \in G\}$. Posto $N = \langle X \rangle$, provare quanto segue

1. $N$ è normale in $G$.
2. Per ogni $\alpha \in G/N$, $\alpha^n = 1$.