II Compitino di ALGEBRA 2
29 gennaio 2010

1. Sia G un gruppo finito d'ordine 1225. Si mostri che G è abeliano.

2. Siano G un gruppo ed $\mathbb{F}$ il campo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Posto $\Omega = \mathbb{F}^G$ sia, per ogni $x \in G$ ed $f \in \Omega$, $x.f$ l'elemento di Ω definito ponendo, per ogni $a \in G$, $x.f(a) = f(ax)$. Dimostrare che in questo modo si definisce un'azione (sinistra) di G su Ω. Sia $f \in \Omega$ la funzione definita da $f(1) = 1$ e $f(g) = 0$ se $g \neq 1$. Trovare lo stabilizzatore di f in G. Trovare quindi il nucleo dell'azione. Nel caso in cui G sia un gruppo ciclico di ordine primo p, determinare il numero di orbite di G su Ω.

3. Sia $u := -1 + \sqrt[4]{3}$.

(a) Si determini il polinomio minimo, f, di u su $\mathbb{Q}$.

(b) Si dica se $\mathbb{Q}[u]$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.

(c) Si determini il campo di spezzamento, $\mathbb{E}$, di f in $\mathbb{C}$ ed il grado $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}|$.

(d) Si determini l'ordine del gruppo di Galois $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$ e si individui il tipo di isomorfismo di G.

(e) Si esibisca un'estensione normale su $\mathbb{Q}$ di grado 4 che sia contenuta in $\mathbb{E}$.