Prova scritta di ALGEBRA 2
1 giugno 2010

Esercizio 1 Sia X un insieme non vuoto e si consideri $\Delta = X^X$, l'insieme delle funzioni da X in X. Fissato G sottogruppo di $\mathrm{Sym}(X)$ definiamo, per ogni $\sigma \in G$ ed $f \in \Delta$, la funzione $\sigma.f$ ponendo, per ogni $x \in X$, $(\sigma.f)(x) = f((x)\sigma)$. Dimostrare che la funzione $\Phi : G \times \Delta \longrightarrow \Delta$ che alla coppia (σ, f) associa $\sigma.f$, è un'azione sinistra. Nel caso in cui $X = \{1, 2, 3\}$ e $G = S_3$, si determini il numero di orbite in questa azione.

Esercizio 2 Sia G un gruppo finito d'ordine $|G| = m \cdot n$ con m ed n interi coprimi. Poniamo $T := \{g \in G | g^n = 1\}$ ed $H := \langle T \rangle$.

1. Mostrare che ogni potenza di primo che divide n, divide anche $|H|$.
2. Provare che n divide $|H|$.
3. Dimostrare che, se G è abeliano, allora $H = T$ e $|H| = n$,
4. mostrare con un controesempio che, se G non è abeliano, può essere tanto $|H| = n$ quanto $|H| \neq n$.

Esercizio 3 Siano $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{K}$ campi e sia $\alpha \in \mathbb{K}$ un elemento algebrico su $\mathbb{F}$. Sia inoltre $f := \min_{\mathbb{E}}(\alpha)$ il polinomio minimo di α su $\mathbb{E}$. Provare che

1. le radici di f sono elementi algebrici su $\mathbb{F}$,
2. Se l'estensione $\mathbb{K} \mid \mathbb{F}$ è algebrica ed A è un sottoanello di $\mathbb{K}$ contenente $\mathbb{F}$, allora A è un campo.

Esercizio 4 Sia G un gruppo e, nell'insieme $H = G \times G$ si consideri l'operazione $(x, a) * (y, b) := (xy, a^y b)$, dove $a^y = y^{-1}ay$. Con questa operazione H è un gruppo (NON bisogna dimostrarlo).

1. Determinare l'elemento neutro di H e, per ogni $(x, a) \in H$ trovarne l'inverso.
2. Dimostrare che la funzione $\theta : H \longrightarrow G$ definita da $\theta(x, a) = xa$ è un morfismo suriettivo, e trovare $K = \ker(\theta)$.
3. Dimostrare che $A = \{(1, a) \mid a \in G\}$ è un sottogruppo normale di H e che $G = KA$.
4. Dire se è vero che, presi $\alpha \in A$ e $\beta \in K$, si ha $\alpha\beta = \beta\alpha$.