Prova scritta di ALGEBRA 2
1 luglio 2010

Esercizio 1 Sia $\mathbb{F}$ un campo. Per ogni funzione $f \in \mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{F}$, sia $\alpha.f$ l'elemento di $\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{F}$, $(\alpha.f)(x) = f(\alpha x)$. Dimostrare che la funzione $\Psi : \mathbb{F}^* \times \mathbb{F}^{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ definita da $\Psi(\alpha, f) = \alpha.f$ è un'azione e trovarne il nucleo. Dire quando l'azione è transitiva. Nel caso in cui $\mathbb{F}$ è il campo con 4 elementi, trovare il numero di orbite.

Esercizio 2 Nel gruppo S_5 si considerino gli elementi $\sigma = (12345)$, $\tau = (25)(34)$ e il sottogruppo $G = \langle \sigma, \tau \rangle$.

1. Provare che $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$.
2. Provare che $\tau \in N_G(\langle \sigma \rangle)$.
3. Provare che $G = \langle \sigma \rangle \langle \tau \rangle$.
4. Trovare il centro di G.

Esercizio 3 Sia α il numero complesso $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

1. Determinare il polinomio minimo f di α su $\mathbb{Q}$ e tutte le sue radici complesse.
2. Detto $\mathbb{K}$ il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$, calcolare il grado $|\mathbb{K} : \mathbb{Q}|$ e dire se l'estensione $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ è di Galois.
3. Determinare a meno di isomorfismi il gruppo di Galois $Gal(\mathbb{K}|\mathbb{Q})$.
4. Quali sono i campi intermedi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$?

Esercizio 4 Sia G l'insieme delle matrici 2×2 della forma

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_3, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

1. Mostrare che G è un sottogruppo del gruppo generale lineare $GL(2, \mathbb{Z}_3)$.
2. Trovare l'ordine di G.
3. Dire se G è abeliano e/o ciclico.
4. Mostrare che l'elemento $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ di $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ normalizza G (ovvero mostrare che $\alpha^{-1} G \alpha = G$)