Prova scritta di ALGEBRA 2
5 febbraio 2010

Esercizio 1 Siano $\mathbb{F}$ un campo e G un gruppo di automorfismi di $\mathbb{F}$. Posto $\Omega = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{F}\}$ definiamo per ogni $(g, a + bx) \in G \times \Omega$,

$$g.(a + bx) := g(a) + g(b)x.$$

Dimostrare che questo definisce una azione sinistra di G su Ω. Nel caso in cui $\mathbb{F}$ abbia ordine 4 e $G = \langle \phi \rangle$ dove ϕ è il morfismo di Frobenius, dire quanti sono i punti fissi dell'azione e trovare il numero di orbite.

Esercizio 2 Siano G un gruppo abeliano e $\sigma : G \longrightarrow G$ un morfismo. Dimostrare che la funzione $f : G \longrightarrow P = G \times G$ definita da $f(x) = (x, \sigma(x))$ è un morfismo e determinarne il nucleo. Posto $H = \mathrm{Im}(f)$ dimostrare che $g : G \longrightarrow P/H$ definita da $g(x) = (1, x)H$ è un morfismo, e determinarne il nucleo. Provare infine che P/H è isomorfo a G.

Esercizio 3 Sia G un gruppo e sia $\mathcal{C}$ un'intera classe di coniugio di G. Sia

$$H := \{g \in G | gx = xg,\ \forall x \in \mathcal{C}\}.$$

Provare che

1. H è un sottogruppo normale di G.
2. $H \cap \mathcal{C} \neq \varnothing$ se e solo se $\mathcal{C} \subseteq H$.

Esercizio 4 Sia ω la radice sesta primitiva dell'unità $\omega := e^{2\pi i/6} \in \mathbb{C}$.

1. Determinare il polinomio minimo f di ω su $\mathbb{Q}$.
2. Dire se l'estensione $\mathbb{Q}[\omega]|\mathbb{Q}$ è normale ed, in caso affermativo, esprimere le radici di f come funzioni razionali di ω.
3. Trovare quindi il campo di spezzamento complesso $\mathbb{E}$ su $\mathbb{Q}$ per il polinomio $g(x) = x^6 - 1$.
4. Calcolare l'ordine del gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$ e dire se è un gruppo abeliano, motivando la risposta.