Prova scritta di ALGEBRA 2
6 settembre 2010

Esercizio 1 Sia G il gruppo $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z} \times Z/6\mathbb{Z}$. Provare che porre

$$\phi(a + 32\mathbb{Z}, b + 6\mathbb{Z}) = (3a + 8b) + 48\mathbb{Z},$$

definisce un morfismo da G in $\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$. Dimostrare che ϕ è suriettivo e provare che

$$K = \ker(\phi) = \{(8x + 32\mathbb{Z}, 3x + 6\mathbb{Z}) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Dire quali tra i gruppi G, K e G/K sono ciclici.

Esercizio 2 Siano G un gruppo ed H, K due suoi sottogruppi. Poniamo A il prodotto diretto *esterno* $A := H \times K$. Dati $x \in G$ e $(h, k) \in A$, poniamo $x.(h, k) = h^{-1}xk$. Provare che in tal modo si definisce una azione di A su G. Nel caso in cui H, K sono contenuti in $Z(G)$ determinare, per ogni $x \in G$, lo stabilizzatore $\mathrm{Stab}_A(x)$ e mostrare che è isomorfo al sottogruppo $H \cap K$ di G. Se G è finito e $(|H|, |K|) = 1$, provare che l'orbita di ogni elemento $x \in G$ ha lunghezza $|\mathcal{O}_A(x)| = |H|\,|K|$.

Esercizio 3 Sia G un gruppo d'ordine 20 e sia $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ un morfismo suriettivo. Si provi che

1. G ha un unico sottogruppo normale d'ordine 4.
2. G è un gruppo abeliano.

È vero che G è ciclico?

Esercizio 4 Sia α il numero reale $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

1. Determinare il grado di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.
2. Stabilire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.
3. Detto $\mathbb{E}$ il campo di spezzamento del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ si esibisca un'estensione intermedia $\mathbb{E} \supseteq \mathbb{L} \supseteq \mathbb{Q}$ tale che $\mathbb{L} \nsubseteq \mathbb{R}$.
4. Calcolare l'ordine di $Gal(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$.