Prova scritta di ALGEBRA 2
19 aprile 2010

Esercizio 1 Siano G un gruppo ed N un suo sottogruppo normale d'ordine 2. Mostrare che N è contenuto nel centro di G.
Preso G un gruppo finito d'ordine $2p$, dove p è un primo dispari, provare che G è ciclico se e solo se esiste in G un sottogruppo normale d'ordine 2.

Esercizio 2 Sia G un gruppo che agisce transitivamente su un insieme non vuoto Ω e indichiamo con G_α lo stabilizzatore del generico elemento $\alpha \in \Omega$. Si provi che un sottogruppo N di G è transitivo su Ω se e solo se $G = G_\alpha N$ (per un qualche $\alpha \in \Omega$).
Considerata l'azione del gruppo simmetrico S_4 sull'insieme Ω di tutti i sottoinsiemi di cardinalità tre dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$, si determini la cardinalità di Ω, lo stabilizzatore $G_{\{1,2,3\}}$ e si provi che il sottogruppo di Klein V_4 è transitivo su Ω.

Esercizio 3 Sia $f(X)$ un polinomio irriducibile a coefficienti in $\mathbb{Q}$ di grado $n \geq 2$. Si assuma che f ha esattamente r radici reali con $0 < r < n$. Siano $\mathbb{E}$ il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{L} = \mathbb{E} \cap \mathbb{R}$.
Dire se $\mathbb{L}$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$ e mostrare che $|\mathbb{L} : \mathbb{Q}| \geq n$ e $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}| \geq 2n$.
Posto $f(X) = X^4 - 2X^3 - 2X + 1$, si provi che

1. $f(X)$ è irrriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ (suggerimento: può essere opportuno considerare il polinomio $f(X + 1)$),
2. f ha almeno una radice reale e se α è radice di f allora $1/\alpha$ è pure radice di f.

Calcolare infine $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}|$ e identificare a meno di isomorfismo il gruppo di Galois $Gal(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$.