Prova scritta di ALGEBRA 2
27 settembre 2010

Esercizio 1 Siano S_3 il gruppo simmetrico di grado 3 e C un gruppo ciclico infinito. Nell'insieme $G = S_3 \times C$ defininamo l'operazione $(\sigma, a)(\tau, b) = (\sigma\tau, a^{\mathrm{sgn}(\tau)}b)$. Con questa operazione G è un gruppo (NON dovete dimostrarlo).

1. Provare che $N = \{(1, a) \mid a \in C\}$ è un sottogruppo normale di G.
2. Detto $z = ((123), 1)$, provare che $Z = \langle z \rangle$ è normale in G.
3. Dimostare che $H = NZ$ è un sottogruppo di G. Dire se H è normale e, in caso affermativo trovare l'ordine di G/H.

Esercizio 2 Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{F}$ e si consideri l'insieme Ω i cui elementi sono i sottospazi di V dimensione 1. Detto G il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili di V, si dimostri che porre, per ogni $g \in G$ e ogni $W \in \Omega$, $g.W = \{g(w) \mid w \in W\}$, definisce una azione sinistra di G su Ω. Dire se l'azione è transitiva e se è fedele. Nel caso in cui V abbia dimensione 2 ed $\mathbb{F}$ sia il campo di ordine 5, trovare l'ordine di ciascuna orbita.

Esercizio 3 Sia G un gruppo d'ordine 231. Si provi che G non è semplice. È vero che il centro di G è non banale? Provare che, se esiste un morfismo suriettivo da G in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, allora il gruppo G è ciclico.

Esercizio 4 Sia ϵ il numero complesso $e^{2\pi i/8}$ e sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\epsilon]$.

1. Dire se l'estensione $\mathbb{K}|\mathbb{Q}$ è di Galois.
2. Mostare che $Gal(\mathbb{K}|\mathbb{Q})$ è isomorfo al gruppo $C_2 \times C_2$.
3. Detto $\mathbb{E} = \mathbb{Q}[\sqrt[8]{2}, \epsilon]$, mostrare che $\mathbb{E}|\mathbb{Q}$ è di Galois e che $|Gal(\mathbb{E}|\mathbb{Q})| = 32$.