Compito di Algebra 1
6/6/11

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(r) = r\sqrt{2} + 1$. Poniamo $f_1 = f$ e, per $n > 1$, $f_n = f_{n-1} \circ f$. Provare che, per ogni $n \geq 1$, si ha $f_n(r) = r(\sqrt{2})^n + \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$

Esercizio 2 Nell'insieme $\mathbb{Z}$ si definisca la relazione " $\sim$ " ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b \iff a^2 \equiv b^2 \pmod 5$. Dimostrare che " $\sim$ " è una relazione di equivalenza e determinare la cardinalità di $\mathbb{Z}/\sim$.

Esercizio 3 Dimostrare che l'insieme $A = \{a/7^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ è , rispetto alle usuali operazioni di $\mathbb{Q}$, un anello. Sia $\sigma : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita ponendo, per ogni $f = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$, $\sigma(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i/7^i$. Dimostrare che σ è un morfismo di anelli e che $\mathrm{Im}(\sigma) = A$. Dire se $\ker(\sigma)$ è un ideale primo e/o massimale.

Esercizio 4 Siano A un anello ed I un ideale. Dato B un qualsiasi sottoanello di A, poniamo $S(B) = B + I = \{b + x \mid b \in B, x \in I\}$. Dimostrare che $S(B)$ è un sottoanello di A. Dimostrare che, ponendo per ogni $b + x \in S(B)$, $\tau(b + x) = b + I$, si definisce un morfismo $\tau : S(B) \longrightarrow A/I$.

Esercizio 5 Sia A un anello commutativo e siano I e J due ideali di A. Si ponga

$$Ann(I, J) := \{a \in A | aj \in I \ \forall j \in J\} .$$

Si provi quanto segue

1. $Ann(I, J)$ è un ideale di A che contiene I.

2. Se $A = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$ e $J = n\mathbb{Z}$ allora $Ann(I, J) = c\mathbb{Z}$, dove $c = \frac{m}{M.C.D.(m,n)}$.