Prova di primo parziale
Algebra 1
A.A. 2016/2017

Esercizio 1 *(7 punti) Per ogni* $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ *si ponga rispettivamente*

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = |r+s| \quad e \quad g\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{|r+s|}{(r,s)}$$

(dove il simbolo (r,s) *indica il massimo comune divisore di* r *ed* s*).*
Si provi quanto segue:

1. f *non definisce un'applicazione da* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{N}$*;*
2. g *definisce un'applicazione suriettiva non-iniettiva da* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{N}$*.*

Esercizio 2 *(8 punti) Sia* $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$*. Si provi che ponendo per ogni* $(a,b),(c,d) \in A$

$$(a,b) \simeq (c,d) \quad \text{se e solo se} \quad a+d = c+b$$

si definisce una relazione di equivalenza su A*. Si detemini il numero degli elementi della classe contenente* $(1,2)$*. Si espliciti infine una biezione tra l'insieme quoziente* $A/\simeq$ *e l'insieme* $\mathbb{Z}$*.*

Esercizio 3 *(8 punti) Nel campo complesso* $\mathbb{C}$ *si consideri la relazione definita per ogni* $a+ib, c+id \in \mathbb{C}$ *da:*

$$a+ib \preceq c+id \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} a \leq c \\ b < d \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

1. *Provare che* $(\mathbb{C}, \preceq)$ *è un insieme parzialmente ordinato.*
2. *Dire, motivando la risposta, se* $\preceq$ *è un ordine totale su* $\mathbb{C}$*.*
3. *Trovare i minoranti dell'insieme* $A = \{1+2i, 2+i\}$ *e dire se esiste* $\inf(A)$*.*
4. $(\mathbb{C}, \preceq)$ *è un reticolo?*

Esercizio 4 *(7 punti) Trovare tutte le soluzioni intere della seguente congruenza*

$$x^{31} + 5x^{21} \equiv 2x + 25 \quad (mod\ 21).$$