Corso di Algebra 2.

Prova scritta del 3 marzo 2009

Esercizio 1. Sia $Z_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Sull'insieme $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ si definisce la seguente oprazione:

$$(a, b) * (c, d) = (a + (-1)^b c, b + d)$$

Allora $(G, *)$ è un gruppo **(non serve provare questo!)**.

(a) Determinare il centro $Z(G)$.

(b) Provare che $G/Z(G) \simeq S_3$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine 28. Provare che se G ammette un sottogruppo normale di ordine 4 allora G è abeliano.

Esercizio 3. Sia $\Omega = \{ax + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5[x]$, e sia G il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_5^*$.

(a) Si provi che il porre, per ogni $g \in G$ ed ogni $ax + bx^2 \in \Omega$,

$$(ax + bx^2)^g = a(gx) + b(gx)^2$$

definisce un'azione di G su Ω;

(b) Si dica, motivando la risposta, quante sono le orbite di G su Ω.

Esercizio 4. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$, sia

$$f_a = x^4 + x^3 + ax - a^2.$$

(a) Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$, f_a è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$, f_a è completamente riducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Sia E il campo di spezzamento di f_a su $\mathbb{Q}$; si dica per quali $a \in \mathbb{Z}$, $[E : \mathbb{Q}] = 4$.

Esercizio 5. Sia $E|F$ un'estensione di Galois, e sia L campo con $F \leq L \leq E$. Si provi che se $L|F$ è normale, allora $\sigma(L) = L$ per ogni $\sigma \in Gal(E|F)$.