

Ex 1. Ssia $u = i\sqrt{2\sqrt{3}-3}$

(a) Si determini il polinomio minimo di u su \mathbb{Q} .

(b) Sia $E \subseteq \mathbb{C}$ campo di spezzamento per f su \mathbb{Q} ; si dica se $\sqrt[3]{3} \in E$.

(c) Si determini $|\text{Gal}(E|\mathbb{Q})|$.

(d) Si dica se esiste $1 \neq \omega \in E$ tale che $\omega^5 = 1$.

Ex 2. Ssia E/F estensione di campi, e siano $a, b \in E$ con a algebrica su F e b trascendente su F ; si provi che

$$F[a] \cap F[b] = F$$

Ex 3. Sia $f = x^6 + 2x^4 + x^2 + 7 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Si dica quante radici multiple ha f (in un campo di spezzamento).

Si costruisce quindi un'estensione di \mathbb{Z}_5 che contenga almeno una radice multipla di f .

Ex 4. Ssia E/F estensione algebrica (non necessariamente finita) e sia $G = \text{Gal}(E/F)$. Allora G opera su E ;

si provi che, rispetto a tale azione, per ogni $a \in E$ l'orbita di a è finita.