Compito di ALGEBRA 2
7 settembre 2009

Esercizio 1. Sia G un gruppo e $\phi : G \to G$ un'applicazione, Nel gruppo $G \times G$ si consideri il sottoinsieme $H = \{(g, \phi(g)) \mid g \in G\}$.

(a) Si provi che H è un sottogruppo di $G\times G$ se e solo se ϕ è un endomorfismo.

(b) Si assuma che ϕ sia un endomorfismo e si definisca $K = \{(g, 1_G) \mid g \in G\}$; si provi che $H \cap K = \{1_{G\times G}\}$ se e solo se ϕ è iniettivo, e che $HK = G \times G$ se e solo se ϕ è suriettivo.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{Q}$ il gruppo additivo dei razionali, e sia p un numero primo fissato. Sia

$$A = \{m/n \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z},\ n = p^k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Si provi che A è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$,

(b) Posto $G = A/\mathbb{Z}$, si provi che per ogni $a \in G$ esiste $b \in G$ tale che $pb = a$.

Esercizio 3. Sia $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7})$.

(a) Si determini il grado delll'estensione $E|\mathbb{Q}$;

(b) Si dica se l'estensione $E|\mathbb{Q}$ è normale;

(c) Sia α una radice primitiva 105-esima dell'unità; sia quindi L un estesnsione di $\mathbb{Q}$ tale che $E \subseteq L$; si provi che se $L|\mathbb{Q}$ è normale, allora $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq L$;

(d) Si dica se è vero che ogni estensione normale K di E contiene $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 4. Sia E il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^8 - 1$; si determini $|Gal(E|\mathbb{Q})|$, e si dica se è un gruppo abeliano.