Compito di ALGEBRA 2
13 febbraio 2009

1. Sia G un gruppo finito abeliano d'ordine dispari.

(a) Si provi che l'applicazione $\sigma : G \longrightarrow G$ definita da $\sigma(x) = x^2$, per ogni $x \in G$, è un automorfismo di G.

(b) Sia α un automorfismo di G tale che $\alpha^2 = \mathrm{id}$ (automorfismo identico). Siano $H = \{g \in G | \alpha(g) = g\}$ e $K = \{g \in G | \alpha(g) = g^{-1}\}$. Si provi che

i. H e K sono due sottogruppi di G,

ii. $H \cap K = 1$,

iii. per ogni $g \in G$, l'elemento $g\alpha(g^{-1})$ appartiene a K, dedurre che $G = H \times K$.

2. Sia G un gruppo d'ordine $11^2 \cdot 13^2$. Provare che G è un gruppo abeliano.

3. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, dove per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ gli a_i siano tali che $a_i^2 \in \mathbb{Q}$. Detto u un arbitrario elemento di $\mathbb{K}$ mostrare che il grado del polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$ è una potenza di 2.

4. Sia $\mathbb{E}|\mathbb{Q}$ un'estensione normale di campi avente grado $|\mathbb{E} : \mathbb{Q}| = p$, ove p è un primo dispari. Provare quanto segue.

(a) Il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{Q})$ è ciclico.

(b) Posto $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}|\mathbb{Q}) =< \alpha >$ e detto $\mathrm{Inv}_{\mathbb{E}}(\alpha)$ il sottocampo di $\mathbb{E}$ degli elementi fissati da α, si ha che $\mathrm{Inv}_{\mathbb{E}}(\alpha) = \mathbb{Q}$,

(c) Preso $u \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{Q}$, provare che

$$f = (X - u)(X - u^{\alpha}) \ldots (X - u^{\alpha^{p-1}})$$

è il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.

(d) Mostrare che per ogni $u \in \mathbb{E}$ l'elemento $c_u = uu^{\alpha} \ldots u^{\alpha^{p-1}}$ appartiene a $\mathbb{Q}$.
Preso $u \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{Q}$ e detto $v = uu^{\alpha}$, si provi che $\mathbb{Q}(v) = \mathbb{E}$ e che il termine noto del polinomio minimo di v su $\mathbb{Q}$ è $-(c_u)^2$.