Compito di Algebra I
2/2/09

Esercizio 1 Sia $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b = 1\}$ e si consideri la funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(a, b) = a + b$. Si dica se f è iniettiva e/o suriettiva. Detta $\sim$ la relazione di equivalenza associata ad f, si dica, per ogni $\alpha \in A$, quanti elementi contiene la classe di equivalenza $[\alpha]_\sim$.

Esercizio 2 Sia $A = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$.

1. Provare che A è un anello rispetto alle usuali operazioni tra polinomi.
2. Dato p un primo di $\mathbb{Z}$, dimostrare che p è primo in A.
3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $I_n = (\frac{1}{2^n}x)$. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $I_n \subseteq I_{n+1}$ e $I_n \neq I_{n+1}$.
4. Si dica se A è UFD.
5. Provare che l'ideale $J = (3) + (x)$ è principale e dire quanti elmeneti ha l'anello A/J.

Esercizio 3 L'insieme $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni tra matrici.
(**Questo NON dovete dimostrarlo**).

1. Dimostrare che esiste un morfismo $\sigma : \mathbb{R}[x] \longrightarrow A$, tale che $\sigma(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
2. Mostrare che $\sigma(x^2) = \sigma(2)$, determinare $\ker(\sigma)$ e dire se è un ideale massimale e/o primo.
3. Dire quanti ideali possiede l'anello A e descriverli.

Esercizio 4 Sia D un PID e si scelgano elementi $a, b, c \in D$. Posto $I = (c)$ definiamo la funzione $f : D \times D \longrightarrow D/I$ come $f(x, y) = ax + by + I$. Provare che f è suriettiva se e solo se $D = (a) + (b) + (c)$.