Corso di Algebra 1. A.A. 2008/2009.

Prova scritta del 2/09/09

Esercizio 1. Siano A un anello e $a, b \in A$. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, si ha $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & (\sum_{i=0}^{n-1} a^i)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Si $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) \equiv 0 \pmod 6\}$. Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$. Dire quanti elementi ha l'anello $\mathbb{Z}[x]/I$.

Esercizio 3. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss si considerino i sottoinsiemi $I = \{a + ib \mid a + b \equiv 0 \pmod 2\}$ e $J = \{(x - y) + i(x + y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Mostrare che I e J sono ideali di $\mathbb{Z}[i]$.
2. Trovare un generatore per I, J e $I \cap J$.

Esercizio 4. Sia ω un numero complesso tale che $\omega^2 - \omega + 1 = 0$. Dimostrare che l'insieme $A = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di $\mathbb{C}$. Dimostrare che, per ogni elemento $\alpha \in A$, esistono unici $a, b \in \mathbb{Q}$, tali che $\alpha = a + b\omega$. Si mostri quindi che porre $f(a + b\omega) = (a + b) - b\omega$, definisce un morfismo da A in A. Trovare il nucleo di f e dire se f è iniettivo e/o suriettivo.

Esercizio 5. Sia $f = x^2 + ax - 1 \in \mathbb{R}[x]$. Si determini, in funzione di $a \in \mathbb{R}$, il numero di ideali dell'anello $A = \mathbb{R}[x]/(f)$.