Corso di Algebra 1. A.A. 2008/2009.

Prova scritta del 6/07/09

Esercizio 1. Siano A un anello e $a, b \in A$. Definiamo la funzione $f : A \longrightarrow A$ ponendo, per ogni $x \in A$, $f(x) = xa + b$. Definiamo $f^1 = f$ e, per $n > 1$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, la funzione f^n è definita da $f^n(x) = xa^n + b(\sum_{i=0}^{n-1} a^i)$.

Esercizio 2. Dati un anello commutativo A ed un suo ideale I, si definisca $R(I) = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$. Dimostrare che $R(I)$ è un ideale di A che contiene I. Provare che $R(I)/I = \{\alpha \in A/I \mid \alpha \text{ è nilpotente }\}$. Se $A = \mathbb{F}_2[x]$ e I è l'ideale generato da $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, determinare $R(I)$ e dire se $A/R(I)$ è un dominio di integrità.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $\sigma : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{Q}[x]$ definita da $\sigma(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}, \sum_{i=0}^{n} a_i x^{3i})$. Dimostrare che σ è un morfismo di anelli. Trovare $\ker(\sigma)$ e dire se σ è iniettivo e/o suriettivo. Dire se $\mathbb{Q}[x]/\ker(\sigma)$ è un dominio.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Nell'anello $\mathbb{F}[x]$ si determini il M.C.D. d dei polinomi $a(x) = x^4 + 2x^3 + 4x + 3$ e $b(x) = x^2 + 5x + 6$. Dire se $\mathbb{F}[x]/(d)$ è un campo.

Esercizio 5. L'insieme $A = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un sottoanello di $\mathbb{R}$ (questo NON deve essere dimostrato). Provare che $I = \{3x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ è un ideale principale di A. Dimostrare che la funzione $\pi : A \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ definita da $\pi(a + b\sqrt{3}) = a + 3\mathbb{Z}$ è un morfismo. Mostrare che $\ker(\pi) = I$ e dire se I è primo e/o massimale.