Prima prova in itinere di Algebra 1
A.A. 2010/2011
Fila A

Esercizio 1 Poniamo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$, $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{7}}\left\{\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)^n\right\}$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dire se f è iniettiva e/o suriettiva. Dire se f ammette inversa destra e/o sinistra e, in caso affermativo, trovarne una. Determinare l'insieme $f^{-1}(\{-1, 0, 2\})$.

Esercizio 3

1. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $41x + 27y = 1$.
2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $41x^2 + 27xy = 2$.

Esercizio 4 Sia $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ e definiamo su di esso la seguente relazione, per ogni $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$:

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\text{ tale che 2 divide } f(i) - g(i) \;\text{ per ogni }\; i \geq n.$$

1. Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
2. Descrivere la classe d'equivalenza della funzione costante uguale ad 1 e mostrare che tale classe contiene infiniti elementi.
3. Elencare quattro elementi distinti dell'insieme quoziente $\frac{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}}{\sim}$.

Prima prova in itinere di Algebra 1
A.A. 2010/2011
Fila B

Esercizio 1 Poniamo $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ e, per ogni $n \geq 2$, $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{7}} \left\{ \left(\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \right)^n - \left(\frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \right)^n \right\}$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita da

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dire se f è iniettiva e/o suriettiva. Dire se f ammette inversa destra e/o sinistra e, in caso affermativo, trovarne una. Determinare l'insieme $f^{-1}(\{-2, 0, 1\})$.

Esercizio 3

1. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $41x + 27y = 1$.
2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $41xy + 27y^2 = 3$.

Esercizio 4 Sia $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ e definiamo su di esso la seguente relazione, per ogni $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$:

$$f \sim g \quad \text{se e solo se} \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\text{ tale che 2 divide }\; f(i) - g(i) \;\text{ per ogni }\; i \geq n.$$

1. Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
2. Descrivere la classe d'equivalenza della funzione costante uguale ad 1 e mostrare che tale classe contiene infiniti elementi.
3. Elencare quattro elementi distinti dell'insieme quoziente $\frac{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}}{\sim}$.