Seconda prova in itinere di Algebra 1 A.A. 2010/2011

Esercizio 1 Siano $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo e c un elemento non nullo di A; si consideri l'applicazione $\varphi : A \longrightarrow A$ definita ponendo per ogni $a \in A$, $\varphi(a) = ac$. Provare che

1. φ è iniettiva se e solo se c non è un divisore dello zero di A.
2. φ è biettiva se e solo se c è un elemento invertibile di A.

Fissato ora c elemento invertibile di A, si definisca sull'insieme A un altro prodotto ponendo per ogni $a, b \in A$

$$a * b := a \cdot b \cdot c.$$

Mostrare che

3. $(A, +, *)$ è un anello.
4. $(A, +, \cdot)$ e $(A, +, *)$ sono anelli isomorfi.

Esercizio 2 Determinare gli elementi invertibili, i nilpotenti e i divisori dello zero dell'anello

$$A := \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$$

Esercizio 3 Provare che l'insieme $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\}$ è , rispetto alle usuali operazioni tra matrici, un anello commutativo, e trovarne la cardinalità . Mostrare che, per ogni $\alpha \in A$, si ha $3\alpha = 0_A$. Provare quindi che la funzione $f : A \longrightarrow A$ definita da $f(\alpha) = \alpha^3$ è un morfismo di anelli. Dire se f è iniettivo e/o suriettivo. Determinare la cardinalità di $A/\ker(f)$ e dire se questo anello possiede divisori di zero.

Esercizio 4 Risolvere il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ x \equiv 2 \pmod{24} \end{cases}$$