Terza prova in itinere di Algebra 1
13/5/11

Esercizio 1 Sia $\mathbb{F}$ un campo arbitrario e fissiamo un polinomio f di $\mathbb{F}[x]$. Si ponga

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F}[x] &\longrightarrow \mathbb{F}[x] \\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i f^i. \end{aligned}$$

1. Dimostrare che σ è un omomorfismo di anelli.

2. Mostrare che, se $f \neq 0$, $\partial(\sigma(h)) = \partial(h) \cdot \partial(f)$, per ogni h non nullo (∂ *indica il grado del polinomio*). Determinare $\ker(\sigma)$.

3. Dire per quali f la funzione σ è suriettiva.

Esercizio 2 Nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si consideri l'ideale $J := \left\{2(a+b) + (a+2b)\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ (**non dovete dimostrare che J è un ideale**) .

1. Trovare un generatore di J.

2. Posto $K := (\sqrt{2})$, trovare $J \cap K$ e $J + K$.

3. Mostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{Z} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}{J} \\ z &\longmapsto z + J \end{aligned}$$

   è un omomorfismo suriettivo e trovarne il nucleo

4. Dire se J è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ e calcolare la cardinalità di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/J$.

Esercizio 3 Nell'anello $\mathbb{Z}_3[x]$ si considerino i polinomi $f(x) = x^4+x^3-2x^2+x$ e $g(x) = x^3 - x^2 + x + 2$, e sia $C := (f(x), g(x))$.

1. Trovare un generatore di C.

2. Calcolare la cardinalità di $\mathbb{Z}_3[x]/C$ e dire se è un campo.

3. Trovare l'inverso dell'elemento $x + C$ in $\mathbb{Z}_3[x]/C$.