Compito di ALGEBRA 2
15 giugno 2009

1. Per $i = 1,2$ indichiamo con $[x]_{p^i}$ la classe dei resti di x modulo p^i e sia

$$G_i := \left\{ \begin{pmatrix} [1]_{p^i} & [a]_{p^i} & [b]_{p^i} \\ & [1]_{p^i} & [c]_{p^i} \\ & & [1]_{p^i} \end{pmatrix} \Big| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Gli insiemi G_1 e G_2 sono due gruppi rispetto l'usuale prodotto (righe-per-colonne) di matrici (N.B. Questo NON si deve dimostrare!).
Sia $\pi : G_2 \longrightarrow G_1$ l'applicazione definita da

$$\pi\Big(\begin{pmatrix} [1]_{p^2} & [a]_{p^2} & [b]_{p^2} \\ & [1]_{p^2} & [c]_{p^2} \\ & & [1]_{p^2} \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} [1]_{p} & [a]_{p} & [b]_{p} \\ & [1]_{p} & [c]_{p} \\ & & [1]_{p} \end{pmatrix}.$$

(a) Si provi che π è un omomorfismo suriettivo ben definito.

(b) Si provi che $Ker(\pi)$ è abeliano e si determini il suo ordine.

2. Sia G un gruppo finito che agisce *transitivamente* su un insieme finito non vuoto Ω. Sia $\alpha \in \Omega$ e sia G_α lo stabilizzatore di α in G. Indichiamo con $Fix(G_\alpha) := \left\{\omega \in \Omega | \omega^h = \omega, \, \forall h \in G_\alpha\right\}$ e con $N_G(G_\alpha)$ il normalizzante in G di G_α. Si provi quanto segue

(a) per ogni $g \in N_G(G_\alpha)$, $\alpha^g \in Fix(G_\alpha)$,

(b) $N_G(G_\alpha)$ è transitivo su $Fix(G_\alpha)$
(suggerimento: si ricordi che G è transitivo su Ω).

3. Siano p e q due primi dispari distinti ($p > q > 2$) e sia $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$. Posto $\alpha_1 = \sqrt{p + q + 2\sqrt{pq}}$ e $\alpha_2 = \sqrt{p + q - 2\sqrt{pq}}$.

(a) Si provi che

  i. $\alpha = \alpha_1$,

  ii. $\alpha_1 \alpha_2 = p - q$,

  iii. $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\sqrt{p}$.

(b) Si determini il polinomio minimo di α in $\mathbb{Q}$ e tutte le sue radici complesse.

(c) Detto $\mathbb{E}$ il campo di spezzamento di tale polinomio, mostrare che $\mathbb{E} = \mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}]$ e determinare i campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{E}$.

4. Sia $E|F$ un'estensione normale di campi. Siano M ed N dei campi intermedi. Provare che se $M|F$ ed $N|F$ sono estensioni normali, allora anche $M \cap N|F$ è normale.