Corso di Algebra 1. A.A. 2008/2009.

Prova scritta del 16/06/09

Esercizio 1. Poniamo $a_0 = 0, a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{3}} \Big\{ \Big(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \Big)^n - \Big(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \Big)^n \Big\}$$

Esercizio 2. Fissato $2 \leq k \in \mathbb{N}$, nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}[x]$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, con $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $g = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$,

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv \sum_{i=0}^{m} (-1)^i b_i \pmod{k}$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.

(b) Si determini il numero di classi di equivalenza in $\mathbb{Z}[x]$ modulo $\sim$, e si dica quali tra tali classi sono ideali di $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 3. Siano A un anello commutativo e $\sigma : A \longrightarrow A$ un morfismo. Dimostrare che la funzione $\varphi : A[x] \longrightarrow A[x]$ definita da $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i)x^i$, è un morfismo di anelli. Dimostrare che $\ker(\varphi) = \{\sum_{i=0}^{n} a_ix^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in \ker(\sigma)\ \forall i\}$. Nel caso in cui A sia un dominio, si dica se $\ker(\varphi)$ è un ideale primo.

Esercizio 4. Siano R un anello commutativo ed I un suo ideale. Dimostrare che $A(I) = \Big\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ x & a \end{pmatrix} \mid a \in R, x \in I \Big\}$ è un anello commutativo rispetto alle usuali operazioni tra matrici. Dimostrare che $J = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \mid x \in I \Big\}$ è un ideale di $A(I)$, e dire in quali casi è primo e/o massimale. Nel caso in cui $R = \mathbb{Z}$, si determinino gli invertibili di $A(I)$.

Esercizio 5. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{Z}$, l'anello $A = \mathbb{Q}[x]/(2x^2 + 2ax - 1)$ è un dominio.