Corso di Algebra 1. A.A. 2008/2009.

Prova scritta del 21/09/09

Esercizio 1. Siano A e B due anelli e sia $f : A \longrightarrow B$ un morfismo.
Se C è un sottoanello di B si dimostri che la retroimmagine di C, $f^{-1}(C)$, è un sottoanello di A. Nel caso in cui $A = \mathbb{Z}[i]$, $B = \mathbb{C}$ e f il morfismo definito da $f(a + ib) = a - ib$, si determini $f^{-1}(\mathbb{Q})$.

Esercizio 2. a) In $\mathbb{Q}[x]$ si provi che l'ideale

$$I = (x^2 - 1) \cap (x^2 + 3x + 2)$$

è principale e si determini un suo generatore.
b) $\mathbb{Q}[x]/I$ è un campo?
c) Si esibisca un divisore dello zero dell'anello $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$.

Esercizio 3. Siano A e B due anelli commutativi e sia R il prodotto diretto $R = A \times B$. Preso I un ideale di R si ponga

$$I_A := \{a \in A | \exists b \in B \text{ t.c. } (a, b) \in I\}$$
$$I_B := \{b \in B | \exists a \in A \text{ t.c. } (a, b) \in I\}$$
$$J := \{(u, v) \in R | u \in I_A, v \in I_B\}.$$

a) Si provi che I_A, I_B e J sono ideali rispettivamente di A, B ed R.
b) Si dica se $I = J$, giustificando la risposta.

Esercizio 4. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

a) Si mostri che A è un anello rispetto alle usuali operazioni tra matrici.

b) Posto $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, si mostri che l'applicazione

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b\omega$$

definisce un morfismo di anelli.

c) Si determini il nuleo di f.

d) Si dica se $Im(f)$ è un dominio, un campo.