ESEMPIO 53. *Una variabile aleatoria con densità* $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}$ *è detta uniforme in* $[0, 1]$. *In generale, la variabile aleatoria con densità* $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}$ *è detta* **uniforme** *in* $[a, b]$ *e si indica* $X \sim U([a, b])$.

ESEMPIO 54. *Una variabile aleatoria con densità* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ *è detta Gaussiana standard. In generale, la variabile aleatoria con densità* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma}}$ *è detta* **gaussiana o normale** *di media* m *e varianza* σ^2 *e si indica* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Definiamo ora il valore atteso di una variabile aleatoria continua.

DEFINIZIONE 28. *Data una variabile aleatoria continua* X *con densità* f *si dice* **valore atteso** *di* f*:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

se esiste

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty.$$

Con questa definizione valgono tutte le proprietà viste per il valore atteso, la varianza e la deviazione standard di variabili aleatorie.

6.2. Funzioni di distribuzione

Una descrizione delle variabili aleatorie che inizia ad unificare il trattamento delle variabili discrete e continue è la funzione cumulativa o funzione di distribuzione.

DEFINIZIONE 29. *Si dice funzione* **funzione cumulativa** *o* **funzione di distribuzione** F_X *di una variabile aleatoria* X *la funzione* $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$F_X(t) = P(X \leq t).$$

Tale definizione è valida sia per le variabili aleatorie discrete che continue.

ESEMPIO 55. *La funzione di distribuzione di una variabile aleatoria* $Y \sim U(\{1, \ldots, 6\})$ *vale*

$$F_Y(t) = \mathbb{I}_{t\geq 0}\frac{\lfloor t \rfloor \wedge 6}{6}.$$

ESEMPIO 56. *Se* $Z \sim U([a, b])$ *allora*

$$F_Z(t) = \mathbb{I}_{t\geq a}\frac{t \wedge b - a}{b - a}.$$

Descriviamo ora alcune proprietà delle funzioni di distribuzione, una delle quali differenzia le variabili discrete da quelle continue.

TEOREMA 14. *Se* X *è una variabile aleatoria (discreta o continua) allora*

(1) F_X *è non decrescente in* t*.*
(2) $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$
(3) $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$
(4) F_X *è continua da destra.*

Inoltre, se X *è una variabile aleatoria discreta allora*
(5a) se $(a, b]$ *non contiene punti di discontinuità di* F_X *allora* F_X *è costante in* $(a, b]$*.*

Se invece X *è una variabile aleatoria continua con densità* f_X *allora*
(5b) F_X *è continua e* $F'_X(t)$ *esiste per tutti i punti* t *tranne al più un numero finito ed è continua.*

In quest'ultimo caso vale $F'_X(t) = f_X(t)$

DIMOSTRAZIONE.

(1) Chiaramente $\{s : X(s) \leq t\} \subseteq \{s : X(s) \leq u\}$ per tutti i $t \leq u$ da cui la diseguaglianza sulle probabilità .

(2) Per le variabili discrete

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} F_X(t) &= \lim_{t\to-\infty} P(X \leq t) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \sum_{x\in S_X : x\leq t} P_X(x) = 0
\end{aligned}$$

in quanto la sommatoria nell'ultima espressione è il resto di una serie convergente; mentre per le variabili continue

$$\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0$$

per definizione di integrale improprio.

(3) Si ha

$$\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1 - \lim_{t\to-\infty} P(X > t) = 1$$

per gli stessi motivi del punto precedente.

(4) Vale $\lim_{u\searrow t} F_X(u) - F_X(t) = \lim_{u\searrow t} P(t < X \leq u) = 0$; per variabili discrete in quanto anche in questo caso, dopo aver riordinato la serie, si tratta del resto di una serie convergente. Per le variabili continue, se f è continua in t allora

$$P(t < X \leq u) = \int_{t}^{u} f_X(x)dx = \max\{f(x) : x \in [t, u]\}(t - u) \to 0;$$

altrimenti il risultato vale per definizione di integrale improprio in t.

(5) Poiché F_X è non decrescente esiste $\lim_{u\nearrow t} F_X(u) \leq F_X(t)$ e

$$\begin{aligned}
F_X(t) - \lim_{u\nearrow t} F_X(u) &= \lim_{u\nearrow t} P(u < X \leq t) \\
&= P(X = t) - \lim_{u\nearrow t} P(u < X < t) = P(X = t)
\end{aligned}$$

per gli stessi motivi di (4).

(5a) Quindi se X è discreta F_X è discontinua in t se e solo se $t \in S_X$ e se $(a, b]$ non contiene punti di discontinuità di F_X allora

$$0 = P(X \in (a, b]) = F_X(b) - F_X(a).$$

(5b) Se invece X è continua allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$ è derivabile nei punti in cui f_X è continua e vale $F'_X(t) = f_X(t)$. □

Vediamo ora che queste proprietà caratterizzano le funzioni che possono essere funzioni di distribuzione per qualche variabile aleatoria.

LEMMA 19. *Se una funzione soddisfa (1)-(4) e (5a) allora è la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria discreta; se invece soddisfa (1)-(4) e (5b) è la funzione di distribuzione di una variabile continua.*

DIMOSTRAZIONE. Da (1) F è non decrescente quindi in ogni punto esiste il limite sinistro $F(t^-)$ e destro $F(t^+)$ e da (2) e (3) è limitata. Per questo l'insieme S dei punti di discontinuità di F è al più numerabile: infatti un punto di discontinuità è caratterizzato dal fatto che $F(t^-) \neq F(t^+)$ e di punti tali che $F(t^+) - F(t^-) \geq 1/n$ ce ne sono al più n; l'unione su n di tali insiemi dà tutti i punti di discontinuità . Inoltre segue da (4) che $F(t) = F(t^+)$.

Se vale (5a) possiamo porre $P(x) = F(t) - F(t^-) > 0$ per ogni $x \in S$. Se indichiamo con $\dots, x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots$ i punti di S ordinati, allora dalla (5a) $F(x_{n-1}) = F(x_{n-1}^+) = F(x_n^-)$ per cui da (2) e (3) segue che:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} P(x) &= \sum_{N \in \mathbb{Z}} F(x_n) - F(x_n^-) \\ &= \sum_{N \in \mathbb{Z}} F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} (F(x_n) - F(x_{-n})) = 1. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Risulta poi

$$\sum_{x \in S, x \leq t} P(x) = \lim_{n \to \infty} (F(x) - F(x_{-n})) = F(x). \tag{6.24}$$

Se invece vale (5b) si può porre $f(t) = F'(t)$ per tutti i t in cui F è derivabile ed un valore qualunque altrove. Dalla (1) $f \geq 0$ e dalle (2) e (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{t \to \infty} (F(t) - F(-t)) = 1.$$

Infine,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x) - \lim_{t \to \infty} -F(-t) = F(x)$$

per cui F è la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria di densità f.

$\square$

Un esempio importante di variabile aleatoria continua ha densità

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{t\geq 0}$$

detta **distribuzione esponenziale** $exp(\lambda)$. Si noti che se $X \sim exp(\lambda)$ allora

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda,$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\lambda e^{-\lambda t}dt - E(X)^2 = 1/(\lambda)^2,$$

e $SD(X) = 1/\lambda$. Inoltre

$$F_X(t) = e^{-\lambda t}$$

e

$$P(X > t + T|X > t) = e^{-\lambda T}$$

una proprietà che si esprime come perdita di memoria. Per questa caratteristica la distribuzione esponenziale è usata come modello per il tempo di vita di componenti elettronici.

In particolare questo modello potrebbe essere usato per analizzare i tempi di funzionamento dei componenti elettronici di cui all'esempio 2. Per completare l'analisi di questo esempio si devono però considerare le somme di tempi di vita indipendenti, ossia somme di variabili aleatorie continue indipendenti e questo verrà sviluppato nei prossimi capitoli.

Definizione 30. *Si dice che due variabili aleatorie continue X ed Y sono uguali in distribuzione, e si indica $X =^d Y$, se $F_X(t) = F_Y(t)$ per ogni t.*

6.3. Trasformazioni di densità

Descriviamo come cambiano le densità di variabili aleatorie prendendo una funzione di forma semplice di una data variabile aleatoria.

Teorema 15 (Trasformazione di densità). *Data una variabile aleatoria X continua con densità f_X ed una funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona con inversa $x = \phi^{-1}(y)$ si ha:*

$$f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y))|\frac{d}{dy}\phi^{-1}(y)|$$

per ogni y tranne al più i punti in cui f_Y e $f_X \circ \frac{d}{dy}\phi^{-1}$ sono discontinui, che sono al più un numero finito di punti.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo ϕ crescente. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ si ha, effettuando nell'integrazione della terza riga il cambiamento di variabili $y = \phi(x)$ con inversa $x = \phi^{-1}(y)$ e quindi $dx = \frac{d}{dy}\phi^{-1}(y)dy$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_Y(y)dy &= P(Y \in]a, b]) \\
&= P(\phi^{-1}(Y) \in]\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)]) \qquad (6.25) \\
&= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f_X(x)dx \\
&= \int_a^b f_X(\phi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\phi^{-1}(y)dy.
\end{aligned}$$

Se a è un punto di continuità per f_Y e per $f_X \circ \phi^{-1}$ allora per il teorema del valor medio, se $[a, b]$ è piccolo a sufficienza da non contenere punti di discontinuità di f_Y e per $f_X \circ \phi^{-1}$:

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f_Y(y)dy = f_Y(\alpha(a, b))$$

e

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f_X(\phi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\phi^{-1}(y) = f_X(\phi^{-1}(\beta(a, b)))\frac{d}{dy}\phi^{-1}(\beta(a, b))$$

con $\alpha(a, b), \beta(a, b) \in [a, b]$; poiché l'uguaglianza (6.25) vale per ogni intervallo $]a, b]$ si ha:

$$\begin{aligned}
f_Y(a) &= \lim_{b \to a^+} f_Y(\alpha(a, b)) \\
&= \lim_{b \to a^+} f_X(\phi^{-1}(\beta(a, b)))\frac{d}{dy}\phi^{-1}(\beta(a, b)) \\
&= f_X(\phi^{-1}(a)\frac{d}{dy}\phi^{-1}(a)
\end{aligned}$$

quindi $f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y))\frac{d}{dy}\phi^{-1}(y)$ per ogni y tranne al più i punti in cui f_Y e $f_X \circ \frac{d}{dy}\phi^{-1}$ sono discontinui, che sono al più un numero finito di punti.

Se invece ϕ è decrescente è facile verificare che tutti gli intervalli di integrazione risultano invertiti e quindi per riportare l'usuale espressione degli estremi di integrazione dal minore al maggiore si cambia il segno in $\frac{d}{dy}\phi^{-1}$. $\square$

OSSERVAZIONE 8. *La trasformazione delle densità è facile da ricordare pensando alla densità di X come $f_X(x)dx$ per cui se $Y = \phi(X)$ con inversa $X = \phi^{-1}(Y)$ allora si considera il cambiamento di variabili $y = \phi(x)$ con inversa $x = \phi^{-1}(y)$ e quindi $dx = \frac{d}{dy}\phi^{-1}(y)dy$ per cui il risultato precedente si ottiene sostituendo formalmente i valori x e dx così ottenuti.*

ESEMPIO 57. *Se* $X \sim N(0,1)$ *e* $Y = \sigma X + \mu$ *allora* $X = \phi^{-1}(Y) = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ *e*

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Si noti che per le proprietà del valore atteso

$$E(Y) = E(\sigma X + \mu) = \mu$$

e

$$Var(Y) = E((\sigma X + \mu - \mu)^2) = \sigma^2 E(X) = \sigma^2$$

così che $SD(Y) = \sigma$. *Una tale variabile aleatoria* Y *è detta normale con media* μ *e varianza* σ^2, *che si indica con* $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ *ed ha quindi la densità sopra indicata.*

6.4. Vettori aleatori continui

Anche per il caso continuo introduciamo i vettori aleatori, naturalmente attraverso le loro densità congiunta. Per semplicità ammettiamo insiemi di possibili discontinuità lineari.

DEFINIZIONE 31. *Uno spazio di probabilità continua in* $\mathbb{R}^n$ *è una coppia* $(\mathbb{R}^n, f)$ *in cui* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua tranne al più un insieme costituito da un numero finito di iperpiani tale che*

(i) $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ *per ogni* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$

Si dice che un vettore aleatorio continuo $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *n-dimensionale ha distribuzione* $(\mathbb{R}^n, f_{\boldsymbol{X}})$ *se per ogni plurirettangolo* $A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$ *si ha*

$$P(\boldsymbol{X} \in A) = \int_A f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

La distribuzione di un vettore aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *è detta anche* **distribuzione congiunta** *delle* X_i *e la funzione* $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ *è detta* **densità congiunta**.

Si noti che gli integrali utilizzati in questa definizione sono integrali di Riemann (eventualmente impropri) in dimensione n e sono ben definiti essendo le funzioni coinvolte continue su insiemi normali. Si possono ripetere ora molte definizioni e proprietà dei vettori aleatori discreti.

DEFINIZIONE 32. *In un vettore aleatorio continuo* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, *ciascuna delle sue componenti* X_i *è una variabile aleatoria continua, con una sua distribuzione* $(\mathbb{R}, f_{X_i})$ *ottenuta come* **distribuzione marginale** *da*

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\boldsymbol{x}) dx_2 \cdot \ldots \cdot dx_{n-1}.$$

Naturalmente la definizione precedente si applica ad ogni proiezione o marginale X_i, per cui anche nel caso continuo dalle congiunte si determinano le distribuzioni marginali.

ESEMPIO 58. *Sia* $f = c \cdot \mathbb{I}_T$ *in cui* T *è il triangolo*

$$\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1\}.$$

Dalla (ii) della definizione di spazio continuo si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &= c \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_T(\boldsymbol{x}) dx_2) dx_1 \\ &= c \int_0^1 (\int_0^{1-x_1} dx_2) dx_1 \\ &= c \int_0^1 (1 - x_1) dx_1 = c/2 \end{aligned} \tag{6.26}$$

da cui $c = 2$, *poichè essendo i domini di integrazione normali e l'integranda continua l'integrale si può calcolare tramite integrali ripetuti. La marginale di* X_1 *si ottiene da*

$$f_{X_i}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\boldsymbol{x}) dx_2 = 2(1 - x_1).$$

Data una funzione $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed un vettore aleatorio $\boldsymbol{X}$, la composizione $\Phi(\boldsymbol{X})$ è una variabile aleatoria. Senza determinarne la densità possiamo fin da ora calcolarne il valore atteso rispetto alla distribuzione di $\boldsymbol{X}$ come

$$E(\Phi(\boldsymbol{X})) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

LEMMA 20. *Dato il vettore aleatorio* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *si ha*

$$E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando l'induzione su n, è sufficiente dimostrare l'asserzione per $n = 2$:

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} (x_1 + x_2) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} x_1 f(\boldsymbol{x}) dx_2) dx_1 + \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} x_2 f(\boldsymbol{x}) dx_1) dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 + \int_{\mathbb{R}} x_2 f_{X_2}(x_2) dx_2 = E(X_1) + E(X_2) \end{aligned}$$

$\square$

L'indipendenza delle variabili aleatorie continue si può esprimere in termini del rapporto tra densità congiunta e marginali, nel senso che le componenti di un vettore aleatorio $\boldsymbol{X}= (X_1, \ldots, X_n)$ sono indipendenti se e solo se

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

per tutti $\boldsymbol{x}= (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Anche per le variabili continue le marginali permettono la ricostruzione della distribuzione congiunta quando le variabili siano indipendenti.

LEMMA 21. *Se le variabili aleatorie continue X_i, $i = 1, \ldots, n$ sono indipendenti allora*

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} E(\prod_{i=1}^{n} X_i) &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} (x_i f_{X_i}(x_i)) d\boldsymbol{x} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} x_i f_{X_i}(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) \end{aligned}$$

□

Anche per le variabili continue è possibile definire le distribuzioni condizionali.

DEFINIZIONE 33. *Dato un vettore aleatorio $\boldsymbol{X}= (X_1, \ldots, X_n)$, per $k = 1, \ldots, n$, se $(x_1, \ldots, x_k)$ è tale che la densità marginale soddisfa $f_{(X_1,\ldots,X_k)}(x_1, \ldots . x_k) \neq 0$, si dice* **distribuzione condizionata** *di $X_{k+1}, \ldots, X_n$ dato che $(X_1, \ldots, X_k) = (x_1, \ldots, x_k)$ lo spazio di probabilità costituito da $\mathbb{R}^{n-k}$ con densità*

$$\begin{aligned} f_{(X_{k+1},\ldots,X_n)|(X_1,\ldots,X_k)}((x_{k+1}, \ldots, x_n)|(x_1, \ldots, x_k)) \\ = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{f_{(X_1,\ldots,X_k)}(x_1, \ldots . x_k)} \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 34. *Il valore atteso calcolato rispetto alla probabilità condizionale di una variabile aleatoria date le altre si chiama* **valore atteso condizionale** *e si denota*

$$E(X_n|(X_1, \ldots, X_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Le definizioni di $Cov(X,Y)$ e $r(X,Y)$ sono le stesse del caso discreto.

E' quindi possibile considerare anche nel caso continuo variabili i.i.d. tali che esistono valore atteso e varianza, e quindi formulare il Teorema Centrale del Limite. Enunciamo senza dimostrazione il teorema, che vale anche in questo caso.

TEOREMA 16 (Teorema Centrale del Limite per variabili continue). *Per variabili aleatorie continue i.i.d.* $X_1, \dots, X_n$ *tali che* $E(X_i^2) < \infty$ *vale per ogni* $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_1)}{\sqrt{nVar(X_1)}} \le a\right) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Concludiamo con il risultato relativo alla trasformazione di densità per i vettori aleatori.

TEOREMA 17 (Trasformazione di densità per vettori aleatori). *Data un vettore aleatorio* $\boldsymbol{X}$ *n dimensionale continuo con densità* $f_{\boldsymbol{X}}$ *ed un'applicazione* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continua e tale che il determinante dello Jacobiano* $\det(J(\phi(\boldsymbol{X})) \neq 0$*, con* $J(\phi(\boldsymbol{X})) = (\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\dots,n}$*, quindi invertibile con inversa* $\boldsymbol{x} = \phi^{-1}(\boldsymbol{y})$ *si ha:*

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(\phi^{-1}(\boldsymbol{y}))|\det(J(\phi^{-1}(\boldsymbol{Y}))|$$

in tutti i punti di continuità di $f_{\boldsymbol{Y}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni plurirettangolo D si ha, effettuando nell'integrazione della terza riga il cambiamento di variabili $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ con inversa $\boldsymbol{x} = \phi^{-1}(\boldsymbol{y})$:

$$\begin{aligned} \int_D f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} &= P(\boldsymbol{Y} \in D) \\ &= P(\phi^{-1}(\boldsymbol{Y}) \in \phi^{-1}(D)) \qquad (6.27) \\ &= \int_{\phi^{-1}(D)} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ &= \int_D f_{\boldsymbol{X}}(\phi^{-1}(\boldsymbol{y}))|\det(J(\phi^{-1}(\boldsymbol{Y}))|d\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

La conclusione segue per il teorema del valor medio come nel caso delle variabili aleatorie continue. □