getti difettosi ed il numero di oggetti difettosi con difetto d, che si osservano nell'estrazione di m oggetti dal lotto ($m_1 \leq m \leq n$). Determinare la funzione di probabilità del vettore aleatorio (X, Y).

3. Si lanciano due dadi. Siano X ed Y, rispettivamente, il minore ed il maggiore dei due punteggi. Determinare la funzione di probabilità del vettore aleatorio (X, Y).

4. Il vettore aleatorio (X, Y) ha la seguente funzione di probabilità:

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/4 & (x,y) = (0,1) \text{ oppure } (1,0) \\ 1/2 & (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

a) Determinare la funzione di ripartizione di (X, Y).
b) I punti (0,0), (0,1/2) e (1,1) sono punti di continuità per la funzione di ripartizione?

5. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

a) Determinare la funzione di ripartizione del vettore aleatorio (X, Y), essendo $Y = X^2$.
b) Il vettore aleatorio (X, Y) possiede densità?

6. Mostrare che la seguente funzione non è una funzione di ripartizione:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x+y < 1 \\ 1 & x+y \geq 1. \end{cases}$$

7. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con funzione di densità di probabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Determinare la funzione di densità marginale di X.

8. Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo con la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x+y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare
a) la costante c;
b) la funzione di ripartizione di (X, Y).

9. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con funzione di ripartizione

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oppure } y < 0 \\ 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0. \end{cases}$$

Mostrare che le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti.

10. Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo con funzione di ripartizione

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ oppure } y < -1 \\ (1+x^{1/3})(1+y^{1/3})/4 & -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1 \\ (1+x^{1/3}/2 & -1 \leq x \leq 1,\ y > 1 \\ (1+y^{1/3})/2 & -1 \leq y \leq 1,\ x > 1 \\ 1 & x > 1,\ y > 1. \end{cases}$$

Determinare
a) le funzioni di ripartizione marginali
b) la funzione di densità di probabilità di (X, Y).

11. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con funzione di probabilità

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1-p_1-p_2)^{n-x-y} & x = 0,\dots,n, y = 0,\dots,n, \\ & 0 \leq x+y \leq n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di probabilità condizionale di Y dato X.

12. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con funzione di ripartizione della forma $F(x,y) = F_1(x)F_2(y) + F_3(x)$. Mostrare che X e Y sono v.a. stocasticamente indipendenti.

13. Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo con la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(x+y) & x \geq 0, x+y \leq 1, x-y \leq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare
a) la funzione di densità di probabilità marginale di Y
b) la funzione di densità di probabilità condizionale di X dato Y.

14. La funzione di densità di probabilità condizionale di X dato $Y = y (y > 0)$ è la seguente:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} ye^{-yx} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di ripartizione del vettore aleatorio (X, Y), sapendo che la funzione di densità di probabilità marginale di Y è

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

15. Le v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sono stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuite con funzione di ripartizione F. Determinare la funzione di ripartizione di $(X_{(1)}, X_{(n)})$, essendo $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$, rispettivamente il minimo e il massimo di $(X_1, \ldots, X_n)$.

16. Siano X e Y due numeri scelti a caso e indipendentemente uno dall'altro nell'intervallo (0, 1). Determinare la funzione di densità di probabilità della v.a. $Z = X/(X+Y)$.

17. Siano X e Y v.a. stocasticamente indipendenti e identicamente distribuite con funzione di densità di probabilità.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare la funzione di densità di probabilità della v.a. $Z = X/(X+Y)$.

18. Siano X e Y v.a. stocasticamente indipendenti e identicamente distribuiti con funzione di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} (ex!)^{-1} & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare la funzione di probabilità della v.a. $Z = X + Y$.

19. Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con la seguente funzione di probabilità.

$$p_{(X,Y)}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1-p_1-p_2)^{n-x-y} & x = 0, \ldots, n, y = 0; , \ldots, n \\ & 0 \leq x+y \leq n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di probabilità della v.a $Z = X + Y$.

20. Sia (X, Y) un vettore aleatorio continuo con la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di densità di probabilità delle v.a. $Z = X/Y$.

21. Determinare la funzione di probabilità del vettore aleatorio $(X_1, \ldots, X_6)$, essendo $X_1, \ldots, X_6$ rispettivamente, il numero di esiti "1",..."6" in n lanci di un dado.

12. $F(x) = \frac{1}{2}$ non è f. di r. in quanto $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{2} \neq 1$

13. $F_Y \equiv F_X$

14. $G(h+k)/G(k)$

15. $\dfrac{e^{-\mu}\mu^k}{k!(1-e^{-\mu})}$

16. $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

17. $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} & y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

18. $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\log x)^2/2}}{\sqrt{2\pi x}} & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

19. $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1+y^2)} & y \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

20. $F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$ se $a > 0$; $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < b \\ 1 & y \geq b \end{cases}$ se $a = 0$

$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$ se $a < 0$.

21. $Pr\left(|X| < \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $Pr(|X| > 0,1) \simeq 0{,}40$, $Pr\left(-0,1 \leq X < \frac{1}{2}\right) \simeq 0,47$

22. $f_X(x) = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$; $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$;

$Pr(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \dfrac{2}{\pi}\operatorname{artg} 1 = \dfrac{1}{2}$

23. $k = 1/72$

24. $Pr(Y \leq y) = Pr(\sqrt{X} = y) = F_X(y^2)\ y \geq 0$

$f_Y(y) = 2y f_X(y^2),\ y > 0$

25. $Pr(Y \leq y) = Pr(X^2 \leq y) = \begin{cases} Pr(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

$Pr(Y \leq y) = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

$f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}),\ y > 0$

Capitolo 3

1. $p(x,y) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{x!y!(n-x-y)!}(1/6)^x(1/6)^y(2/3)^{n-x-y} & x = 0,\dots,n; y = 0,\dots,n; \\ & x + y \leq n \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

2. $p(x,y) =$

$$\begin{cases} \binom{m_2}{y}\binom{m_1-m_2}{x-y}\binom{m-m_1}{n-x}\Big/\binom{n}{m} & x = 0,\dots,m_1;\ y = 0,\dots,m_2; \\ & y \leq x \leq m \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

3. $p(x,y) = \begin{cases} 1/18 & x = 1,\dots 6;\ y = 1,\dots,6;\ x \neq y \\ 1/36 & x = 1;\dots 6;\ y = 1,\dots,6;\ x = y; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$

4. *a)* $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oppure } y < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 3/4 & x > 1, 0 \leq y < 1 \text{ oppure } y > 1, 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$ *b)* no.

5. *a)* $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oppure } y < 0 \\ \sqrt{y} & 0 \leq y < 1,\ y < x^2 \\ x & 0 \leq x < 1,\ x^2 \leq y \\ 1 & x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$ *b)* no.

6. $\Delta F < 0$ per $x_1 = y_1 = 0, x_2 = y_2 = 1$.

7. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}/\pi & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$

8. *a*) $c = 1/2$;

b) $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oppure } y < 0 \\ xy/2 & x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y < 2 \\ 1-(2-x)^2/4-(2-y)^2/4 & 0 \le x < 2,\ 0 \le y < 2,\ x+y \ge 2 \\ 1-(2-y)^2/4 & x \ge 2,\ 0 \le y < 2 \\ 1-(2-x)^2/4 & y \ge 2,\ 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2,\ y \ge 2 \end{cases}$

9. $F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$

10. *a*) $F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ (1+x^{1/3})/2 & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (xy)^{-2/3}/36 & -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, x \ne 0, y \ne 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

11. $p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \binom{n-x}{y}(p_2/(1-p_1))^y(1-p_2/(1-p_1))^{n-x-y} \\ y = 0, \ldots, n-x \\ 0 \quad \text{altrove per } x = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$

12. Mostrare che $F(x,y) = F_1(x)(F_2(y) - \lim_{y\to-\infty} F_2(y))$, utilizzando l'identità $\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$

13. *a*) $f_Y(y) = \begin{cases} 9y^2 & 0 \le y \le 1/2 \\ 3(1-y^2) & 1/2 < y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

b) $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 2(x+y)/(3y^2) & x \le y \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$ per $0 \le y \le 1/2$

$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 2(x+y)/(1-y^2) & 0 \le x \le 1-y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ per $1/2 \le y \le 1$

14. $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oppure } y < 0 \\ 1 - e^{-y} - \dfrac{(1-e^{-y(x+1)}}{(x+1)} & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$

15. $F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = \begin{cases} (F(y))^n - (F(y)-F(x))^n & x < y \\ (F(y))^n & x \ge y \end{cases}$

16. $f_Z(z) = \begin{cases} (2(1-z)^2)^{-1} & 0 \le z \le 1/2 \\ (2x^2)^{-1} & 1/2 < z \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

17. $f_Z(z) = \begin{cases} 1 & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

18. $p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}2^{z!}}{z!} & z = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

19. $p_Z(z) = \begin{cases} \binom{n}{z}(p_1+p_2)^z(1-p_1-p_2)^{n-z} & z = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

20. $f_Z(z) = \begin{cases} (z+1)^{-2} & z \ge 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

21. $p_{X_1,\ldots,X_6}(x_1,\ldots,x_6) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1!\ldots x_6!}(1/6)^n & x_1 = 0, \ldots, n, \ldots, x_6 = 0, \ldots, n, \\ & x_1 + \ldots + x_6 = n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Capitolo 4

1. 1

2. *a*) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ dove $f(x) = \begin{cases} x^{-2/3}/6 & -1 \le x \le 1,\ x \ne 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

b) $E(X) = 0$

3. 1/2

4. 1

5. $(1-p)/(e-p)$

6. 2/3