Esercizi di Probabilità e statistica

Francesco Caravenna
Paolo Dai Pra

Capitolo 1

Spazi di probabilità discreti

1.1 Proprietà fondamentali

Esercizio 1 Esprimere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A, B, C.

1. Almeno un evento si verifica.
2. Al più un evento si verifica.
3. Nessun evento si verifica.
4. Tutti gli eventi si verificano.
5. Si verifica esattamente un evento.
6. Due eventi su tre si verificano.
7. O si verifica A, oppure, se non si verifica A, neppure B si verifica.

Esercizio 2 Siano A, B due eventi arbitrari.

a. Mostrare che

$$P(A)P(A^c) \leq \frac{1}{4}.$$

b.* Mostrare che

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 Siano A, B eventi. Mostrare che

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Esercizio 4 Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che

$$P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C).$$

Mostrare inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se $P[(A \Delta B) \cap (B \Delta C)] = 0$.

Esercizio 5 a. Siano A e B due eventi arbitrari. Mostrare la disuguaglianza

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

b. Mostrare per induzione che per ogni n-pla di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \geq 2$ si ha

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

1.2 Spazi di probabilità uniformi e calcolo combinatorio

Esercizio 6 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

a. tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
b. le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
c. almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Esercizio 7 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Esercizio 8 Si mescola accuratamente un mazzo di 52 carte da Poker.

a. Calcolare la probabilità che le prime due carte del mazzo siano rispettivamente l'asso e il due di fiori;

b. Calcolare la probabilità che tra le prime dieci carte del mazzo non vi siano carte di fiori.

Esercizio 9 Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Calcolare la probabilità che:

a. nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

b. nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Esercizio 10 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Esercizio 11 Si lanciano 12 dadi. Qual è la probabilità che ognuno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ compaia esattamente 2 volte?

Esercizio 12 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Esercizio 13 Si scelgano, a caso, due numeri dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$. fissato $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, qual è la probabilità che i due numeri scelti siano uno strettamente più grande e uno strettamente più piccolo di k?

Esercizio 14 Si considerino i numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Esercizio 15 Si considerino n persone selezionate in modo casuale. Quanto grande dev'essere n affinchè la probabilità che almeno due di essi compiano gli anni lo stesso giorno sia maggiore di $1/2$?

Esercizio 16 Si supponga di avere un mazzo di n chiavi diverse. Dovendo aprire una serratura di cui si ha la chiave, si provano a caso le n chiavi, mettendo da parte quello già provate, fino a che non si è trovata la chiave giusta. Qual è la probabilità di trovare la chiave giusta dopo k tentativi, con $1 \leq k \leq n$?

Esercizio 17 21 passeggeri salgono su un treno della metropolitana vuoto formato da 3 vagoni, e ognuno sceglie a caso il vagone su cui viaggiare. Si calcoli la probabilità che

1. ci siano 4 passeggeri nel primo vagone;
2. i passeggeri siano uniformemente distribuiti sui 3 vagoni;
3. 5 persone siano su un vagone, 6 su un altro e 10 sul rimanente.

Esercizio 18 Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Mostrare che se $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Esercizio 19 Dimostrare l'affermazione contenuta nell'Osservazione **??**.

Esercizio 20 Un'urna contiene $2n$ palline, n rosse e n verdi. Si effettuano una serie di estrazioni successive, che possono avvenire con due diverse modalità: *senza reimmissione*, cioè la pallina estratta non viene reinserita nell'urna prima dell'estrazione successiva; *con reimmissione*, cioè la pallina estratta viene immediatamente reinserita nell'urna. Supponiamo di effettuare m estrazioni successive, con $m \leq n$.

a. Descrivere gli spazi campionari relativi ai due schemi di estrazione (è conveniente considerare che le palline siano distinguibili, ad esempio numerate da 1 a n quelle rosse e da $n+1$ a $2n$ quelle verdi).

b. Sia, per $0 \leq k \leq m$, A_k l'evento corrispondente all'affermazione "le prime k palline estratte sono rosse e la $k+1$-ma è verde". Assumiamo effettiva casualità nelle estrazioni, cioè che la probabilità sia quella uniforme. Calcolare i valori di $P(A_k)$ per entrambi gli schemi di estrazione.

Esercizio 21 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, diciamo che I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Se P è la probabilità uniforme su S_n, calcolare $P(A_I)$.

Esercizio 22 Fissato $n \geq 1$, consideriamo i punti del piano cartesiano $O = (0, 0)$ e $A = (2n, 2n)$. Consideriamo un cammino uscente da O in cui ad ogni "passo" ci si può muovere di un'unità verso destra o di un'unità verso l'alto. Un cammino che congiunge O e A è chiaramente un cammino di $4n$ passi in cui in esattamente $2n$ passi si va a destra, negli altri $2n$ verso l'alto. Sia Ω l'insieme dei cammini di $4n$ passi che congiungono O e A.

a. Quanto vale $|\Omega|$?

b. Sia E l'insieme dei cammini in Ω che passano per il punto $B = (n, n)$. Se P è la probabilità uniforme su Ω, calcolare $P(E)$.

Esercizio 23 Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Sia p_n la probabilità che gli n oggetti estratti siano tutti diversi.

a. Determinare p_n.

b. Usando la formula di Stirling, si determini il comportamento asintotico di p_n per $n \to +\infty$. In particolare, si mostri che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_n p_n/c\rho^n = 1$), e determinare i valori di c e ρ (formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

1.3 Probabilità condizionata e indipendenza

Esercizio 24 Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 sapendo che la somma dei punteggi ottenuti è 9?

Esercizio 25 Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.

Esercizio 26 Mostrare, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $P(A|B) > P(A)$ e $P(A|B) < P(A)$ sono possibili.

Esercizio 27 Siano A e B due eventi con probabilità non nulla. Diciamo che A *è positivamente correlato a* B se

$$P(A|B) \geq P(A).$$

Mostrare che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti.

a) *A è positivamente correlato a B.*

b) *B è positivamente correlato a A.*

c) *A^c è positivamente correlato a B^c.*

Esercizio 28 Sia S_{4n} l'insieme delle permutazioni di $\{0, 1, 2, \ldots, 4n-1\}$, con $n \geq 1$, e sia P la probabilità uniforme su S_{4n}. Si considerino gli eventi:

$$A = \{\sigma \in S_{4n} : \text{ per ogni } k \text{ pari, } \sigma(k) \text{ è pari}\}$$

$$B = \{\sigma \in S_{4n} : \text{ per ogni } k \leq 2n-1, \sigma(k) \leq 2n-1\}.$$

Calcolare $P(A), P(B)$ e $P(A|B)$.

Esercizio 29 Il 2 per mille delle banconote da 50.000 Lire in circolazione sono false. Una macchina riconosce come false il 98% delle banconote false e, per errore, l'1% di quelle autentiche.

a. Qual è la probabilità che una banconota presa a caso venga rilevata come falsa?

b. Qual è la probabilità che una banconota rilevata come falsa sia, in realtà , autentica?

Esercizio 30 Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$. Mostrare che esiste $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.

Esercizio 31 Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

a. Si effettuano n estrazioni successive, *con* reintroduzione. Si considerino gli eventi

$$B_j = \text{“la } j\text{-esima pallina estratta è bianca”}$$

$$A_m = \text{“delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche”}$$

dove $m \leq n$. Calcolare $P(B_j|A_m)$.

b. Calcolare la probabilità condizionata del punto a. nel caso di estrazioni *senza* reintroduzione, supponendo che m sia tale che $P(A_m) > 0$.

Esercizio 32 Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathcal{F})$. Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Mostrare che

a. $A \cap B$ è indipendente da C.

b. $A \cup B$ è indipendente da C.

Esercizio 33 A tre studenti viene posta la stessa domanda. Supponiamo di sapere che il primo risponderà esattamente con probabilità $2/3$, il secondo con probabilità $1/2$, il terzo con probabilità $1/3$. Gli studenti non possono comunicare tra loro.

a. Se solo uno degli studenti dà la risposta esatta, qual è la probabilità che sia stato il primo?

b. Se due studenti hanno dato la risposta esatta, qual è la probabilità che il terzo abbia dato la risposta esatta?

Esercizio 34 * Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non abbiamo idea di quante siano le palline rosse, sicchè riteniamo che tutti i possibili valori $k = 1, 2, \ldots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

a. Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?

b. Si risponda alle medesima domanda posta in a., ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Esercizio 35 Ho un'urna inizialmente vuota e un insieme di palline numerate coi numeri naturali. Il primo giorno inserisco nell'urna le palline numero 1 e 2, dopodiché ne estraggo una a caso (nell'urna rimane dunque una sola pallina). Il secondo giorno inserisco nell'urna le palline numero 3 e 4, dopodiché estraggo a caso una delle tre palline contenute nell'urna. Itero dunque la procedura: l'i-esimo giorno inserisco nell'urna le palline numero $2i - 1$ e $2i$, dopodiché estraggo a caso una delle $i + 1$ palline contenute nell'urna.

Si introduca per $i \in \mathbb{N}$ l'evento

$$A_i := \text{la pallina numero 1 è presente nell'urna alla fine dell'}i\text{-esimo giorno}\,.$$

a) Si spieghi perchè vale l'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e si deduca la formula

$$P(A_n) \;=\; P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1})\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Si mostri che $P(A_n) = \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 36 * Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità uniforme, in cui Ω contiene un numero primo di elementi. Descrivere tutte le coppie di eventi indipendenti.

Esercizio 37 Quante volte è necessario lanciare un dado affinchè la probabilità di ottenere almeno un 6 sia maggiore o uguale a 0.5?

Esercizio 38 Con 10 proiettili devo colpire 5 bersagli. Ad ogni tiro colpisco un bersaglio con probabilità 1/2, indipendentemente dall'esito degli altri tiri.

a. Qual è la probabilit'a che riesca effettivamente a colpire tutti e cinque i bersagli?

b. Qual è la probabilità che mi avanzino dei proiettili?

Esercizio 39 Un commerciante acquista certe componenti elettriche in egual misura da due fornitori A e B, Viene a sapere che il 15% delle componenti provenienti da B è difettosa, cioè si rompono dopo poche ore di utilizzo, contro solo il 3% di quelle provenienti da A. Il commerciante è in procinto di mettere in vendita una confezione tali componenti, tutte provenienti dallo stesso fornitore, ma di cui non ha registrato la provenienza. Per conoscerne la provenienza ne testa 20, di cui 2 risultano difettose. Con quale grado di confidenza può ritenere che la partita gli sia stata fornita da B?

Esercizio 40 Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità 1/2 di essere prodotta dal primo macchinario, 1/4 da secondo e 1/4 dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?

Esercizio 41 Un semplice modello per la distribuzione dei sessi dei figli è il seguente:

- il primo figlio ha proabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio (o femmina).
- La probabilità che l'$n+1$-esimo figlio sia maschio, condizionata ai sessi dei figli precedenti, è $\frac{3}{5}$ se l'n-esimo figlio è maschio, $\frac{2}{5}$ se l'n-esimo figlio è femmina.

Determinare

a) la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il secondo è maschio;

b)* la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il terzo è maschio.

Esercizio 42 Mostrare che se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_n^c).$$

Esercizio 43 Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n-k$ verdi, con $1 \leq k \leq n-1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$$A_1 = \text{la prima pallina estratta è rossa}$$

$$A_2 = \text{la seconda pallina estratta è rossa.}$$

Mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti

Esercizio 44 Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \leq 1$. Mostrare che

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \leq n^{-n}.$$

(Sugg: usare il fatto che se $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ allora $(a_1 + \cdots + a_n)/n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$.)

Esercizio 45 Il signor A riceve un'informazione che si esprime con un "sì" o con un "no", trasmette tale informazione al signor B, che la trasmette al signor C, che la trasmette al signor D, il quale la annuncia. Ognuno dei quattro signori, indipendentemente dagli altri, mente con probabilità 1/3. Se si sa che D ha annunciato l'informazione corretta, cioè quella che A ha ricevuto, qual è la probabilità che A abbia mentito?

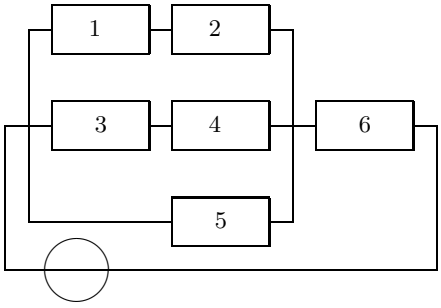
Esercizio 46 Si voglia illuminare una stanza con un dato numero di lampadine. La probabilità che una lampadina sopravviva almeno n giorni è p^n, ove $p = 0.9$. Si può ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine devo installare affinchè, con probabilità almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?

Esercizio 47 Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado. Ora, se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Esercizio 48 In un labirinto a T, ad un animale da laboratorio si dà la possibilità di andare a sinistra e ricevere cibo o di andare a destra e ricevere una leggera scossa elettrica. Assumete che prima di ogni condizionamento (nel tentativo 1) sia ugualmente probabile che gli animali vadano a destra o a sinistra. Dopo aver ricevuto il cibo ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra diventano 0.6 e 0.4, rispettivamente, per il tentativo successivo. Invece, dopo aver ricevuto una scossa elettrica ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra al tentativo successivo diventano rispettivamente 0.8 e 0,2, rispettivamente.

1. Qual è la probabilità che l'animale vada a sinistra al tentativo numero 2?
2. E al numero 3?
3. Se dopo il secondo tentativo si osserva che l'animale è a sinistra, qual è la probabilità che l'animale abbia ricevuto cibo prima dell'ultimo movimento?

Esercizio 49 Si determini la probabilità che il circuito in figura sia "chiuso" supponendo che ciascun interruttore del circuito sia chiuso in modo indipendente e che la probabilità che l'i-esimo interruttore sia chiuso sia p_i, $i = 1, \ldots, 6$.



Esercizio 50 Un sistema ingegneristico di n componenti è detto sistema "k-su-n" se il sistema funziona se è solo se almeno k componenti su n funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino indipendentemente una dall'altra. Se l'i-esima componente funziona con probabilità p_i, qual è la probabilità che un sistema 2-su-4 funzioni?

Esercizio 51 Siano date 2 urne U_1, U_2 tali che U_1 contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere, U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Un giocatore estrarre a caso 2 palline, seguendo una certa strategia, e vince 100.000 Lit se le due palline sono dello stesso colore.

1. Quale delle seguenti tre strategie è preferibile per il giocatore:

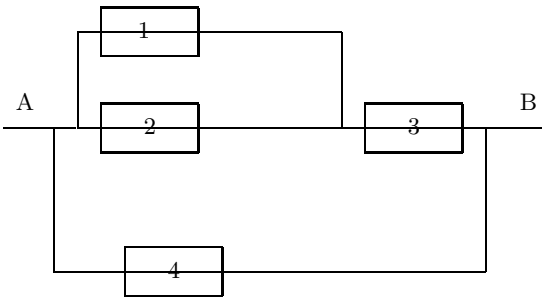
   (a) Il giocatore sceglie a caso l'urna lanciando una moneta, estrae una pallina dall'urna, la rimette nell'urna, rilancia la moneta per scegliere nuovamente l'urna, quindi estrae la 2^a pallina.

   (b) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, la rimette nell'urna, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dalla stessa urna.

   (c) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dall'altra urna.

2. Qual è la probabilità di vincere se le due estrazioni con reimmissione avvengono da un'unica urna contenente il tolale delle palline bianche e nere delle due urne?

Esercizio 52 Un congegno elettronico è strutturato come nel seguente diagramma



Il segnale entra attraverso A e raggiunge B se *almeno* uno dei percorsi segnati è "aperto". Ognuna delle componenti $1, 2, 3$ e 4 ha probabilità $p \in (0, 1)$ di essere "chiusa", indipendentemente dalle altre.

a. Qual è la probabilità che il congegno funzioni, cioè che il segnale entrante in A raggiunga B?

b. Sapendo che il segnale ha raggiunto B, qual è la probabilità che la componente 4 sia aperta?

Esercizio 53 In una partita a Poker con 32 carte (8 per seme) ad un giocatore ne vengono servite 5. Si considerino gli eventi $A =$ "il giocatore riceve almeno due assi", $B =$ "il giocatore riceve almeno un asso", $C =$ "il giocatore riceve l'asso di cuori". Calcolare $P(A|B)$ e $P(A|C)$.

Esercizio 54 Siano $U_0, U_1, \ldots, U_N$ delle urne contenenti ognuna N palline. L'urna U_k contiene k palline rosse e $N - k$ palline verdi. Si sceglie a caso un'urna, e da essa vengono effettuate estrazioni successive *con reimmissione*.

a. Determinare la probabilità (in termini di una sommatoria) che le palline estratte nelle prime n estrazioni siano tutte rosse (sugg.: usare la formula di disintegrazione).

b. Determinare la probabilità che la $n+1$-ma pallina estratta sia rossa condizionata al fatto che le prime n palline estratte sono tutte rosse.

c. * Mostrare che il limite per $N \to +\infty$ della probabilità condizionata al punto b. vale $\frac{n+1}{n+2}$.

Esercizio 55 Mostrare la *formula di disintegrazione per probabilità condizionate*, cioè, dati tre eventi A, B, C tali che $P(B \cap C) > 0$ e $P(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B).$$

Esercizio 56 * Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia n figli, con $n \geq 0$, è $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, dove $\lambda > 0$. Supponiamo inoltre che ogni figlio sia maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri figli. Fissato $k \geq 0$, sia A_k l'evento "il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente k figli maschi". Mostrare che $P(A_k) = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$. (sugg.: sia $B_n =$ "il nucleo familiare scelto ha n figli. Prima determinare $P(A_k|B_n)$ e poi calcolare $P(A_k)$ con la formula di disintegrazione

$$P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n).$$

Ricordare la serie esponenziale $e^\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Esercizio 57 Sia $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Omega := \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$, e P la probabilità uniforme su Ω. Dunque gli elementi di Ω sono coppie ordinate (A, B), con $A, B \subseteq S$. Consideriamo l'evento

$$E := \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}.$$

Inoltre, se $B \subseteq S$, sia $F_B := \{(A, B) : A \subset \Omega$.

a. Determinare $P(E|F_B)$.

b. * Usando la formula di disintegrazione

$$P(E) = \sum_{B \subseteq S} P(E|F_B)P(F_B),$$

mostrare che $P(E) = (3/4)^n$ (ricordare che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$).

Esercizio 58 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$, e P la probabilità uniforme su S_n. Siano $A = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) < \sigma(2)\}$, $B_k = \{\sigma \in S_n : \sigma(2) = k\}$, $C = \{\sigma : \sigma(1) + \sigma(2) \geq n\}$.

a. Calcolare, per $k = 2, \ldots, n$, la probabilità condizionata $P(B_k|A)$.

b. Calcolare $P(C)$ (ricordare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$).

Esercizio 59 È stato indetto un referendum in una popolazione di $n \geq 1$ individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SÌ con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri.

a) Si fissi un individuo. Qual è la probabilità p che egli vada a votare e voti SÌ?

b) Qual è la probabilità che il numero di voti SÌ sia k, per $k \in \{0, \ldots, n\}$? (*Sugg.*: può essere utile basarsi sulla risposta data al punto precedente.)

c) Assumendo che i voti SÌ siano k, si determini la probabilità (condizionata) che i votanti totali siano m, dove $m \in \{k, \ldots, n\}$. Si mostri che tale probabilità vale

$$\binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$